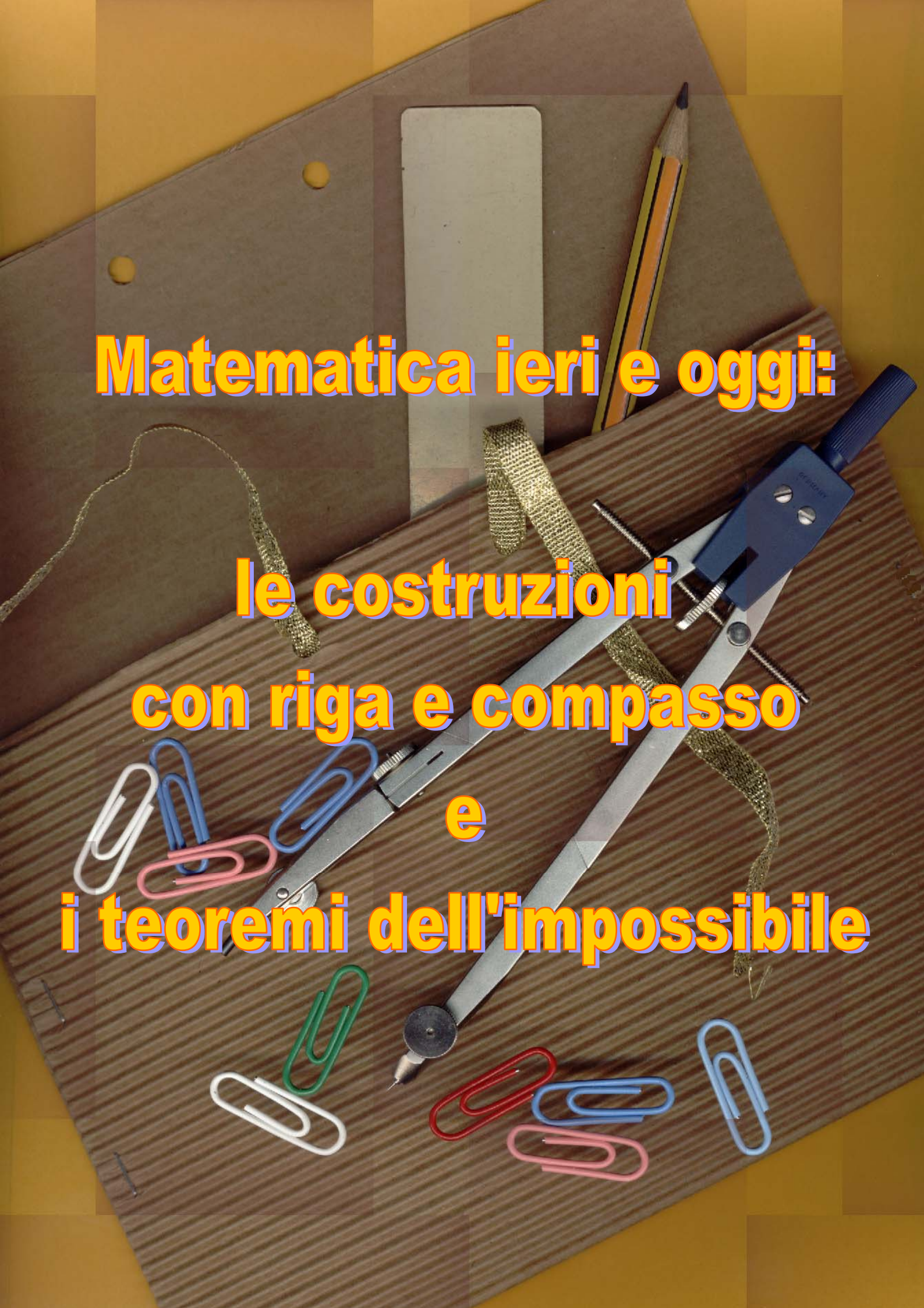


Matematica ieri e oggi:

le costruzioni con riga e compasso e i teoremi dell'impossibile

Introduzione e Note

Il lavoro che segue è stato realizzato dalla classe 2F del Liceo Ginnasio statale "G. Chiabrera" di Savona. Il Liceo comprende due indirizzi di studio, l'indirizzo classico e l'indirizzo linguistico: la classe che ha partecipato al progetto "Lauree Scientifiche", proposto dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Genova, è una **classe articolata** composta da 22 alunni, di cui circa la metà frequenta l'**indirizzo classico**, mentre l'altra metà appartiene al **corso linguistico**.
I giovani allievi, si tratta infatti di un **secondo anno di scuola superiore**, hanno partecipato attivamente e con entusiasmo all'iniziativa, dimostrando un vero interesse per i temi proposti. Questo aspetto è emerso anche dalle risposte al questionario anonimo che è stato sottoposto alla classe al termine del lavoro. Il 76% circa degli allievi ha risposto che il progetto è stato molto o abbastanza interessate; mentre coloro che non sono stati particolarmente attratti dall'iniziativa hanno comunque risposto che valeva la pena parteciparvi.
Il progetto ha visto la classe lavorare in gruppi, ciascuno dei quali con uno specifico argomento da sviluppare e i cui componenti sono stati coinvolti in molteplici impegni. Le attività che hanno coinvolto la classe sono state diversificate:

1. il reperimento del materiale attraverso ricerche su siti Internet, libri e riviste specializzate;
2. la sistemazione dello stesso attraverso un lungo lavoro di rielaborazione e di semplificazione, svolto soprattutto in classe, al fine di rendere maggiormente comprensibile i temi trattati. Gli argomenti, non semplici, dato il bagaglio tecnico posseduto dagli alunni, sono stati affrontati con interesse ma anche con qualche fatica.
3. Un lungo lavoro di ricerca, scansione e ritocco dell'apparato iconografico, per realizzare il quale è stata posta particolare attenzione alla ricerca di immagini che fossero adatte a chiarire o completare gli argomenti proposti; molte di queste sono assolutamente originali, realizzate attraverso l'uso degli strumenti messi a disposizione dal programma di elaborazione testi Word o dal programma di fotoritocco Paint Shop Pro.
4. Una impegnativa attività di rielaborazione dei contenuti a livello dimostrativo, al fine di completare discorsi non semplici, molto spesso appena accennati sui testi utilizzati.
5. Uno studio attento degli argomenti affrontati, in quanto sono state accertate le conoscenze degli allievi attraverso verifiche scritte sul tema delle costruzioni con riga e compasso. La conoscenza dell'argomento trattato dal gruppo di appartenenza è stata constatata, invece, attraverso interrogazioni individuali.
6. Un lavoro di traduzione dal latino delle prime diciotto definizioni presenti negli Elementi di Euclide; attività eseguita grazie alla collaborazione dei docenti di latino dei due indirizzi.
7. Un'interessante attività laboratoriale, svolta in classe, che ha visto gli alunni impegnati nell'utilizzo manuale di riga e compasso, progressivamente sempre più disinvolto, per realizzare le diverse costruzioni presentate nel lavoro.
8. Un non sempre piacevole lavoro di ultimazione del documento preparato, che ha richiesto molte ore al computer per la sua realizzazione.
9. La produzione, accanto al documento base, realizzato in formato word e pdf, di una presentazione in Power Point che ripercorresse i punti fondamentali del lavoro; presentazione per la quale è stata prodotta una originale immagine di apertura attraverso la scansione di oggetti reali, opportunamente scelti e "artisticamente" sistemati per sottolineare ed enfatizzare il tema proposto.
10. L'utilizzo, che proseguirà all'inizio del prossimo anno scolastico, del programma Cabri Géomètre per effettuare a computer le costruzioni geometriche già eseguite manualmente.

Il lavoro, **di cui questo scritto rappresenta una prima stesura**, è stato quindi veramente impegnativo, ma gli alunni sono giunti al termine del faticoso percorso soddisfatti per aver completato un compito un po' fuori dal comune, che li ha visti protagonisti nella realizzazione di un prodotto che può dirsi, almeno per l'80% originale.

L'Insegnante
Silvia Scotti

INDICE

MATEMATICA IERI E OGGI:

le costruzioni con riga e compasso
e
i teoremi dell'impossibile

Il pensiero matematico, come quello religioso ed artistico, ha preso forma nella mente dell'uomo sin dai tempi più antichi ed ha sicuramente origini anteriori a quello della scrittura: esso ha visto i natali a partire da semplici ma sempre più complesse necessità pratiche e da queste necessità ha tratto la linfa dei suoi successivi sviluppi.

Le conoscenze matematiche presso le prime civiltà hanno avuto origine, sia per l'aspetto algebrico che per quello geometrico, essenzialmente da ragioni di carattere concreto: questo fatto si deduce dalle testimonianze che ci sono pervenute dagli storici dell'antichità, quali Erodoto e Proclo, dall'esame dei reperti ritrovati e dallo studio dei siti archeologici individuati in tempi diversi. Esempi di questa concretezza si hanno nella civiltà sviluppatesi nella cosiddetta "Mezzaluna fertile" intorno al 3500 a.C.: ossia quella dei Sumeri e quella successiva dei Babilonesi, che assorbirono la fiorente cultura dei predecessori, ne fecero propri i contenuti e contribuirono a migliorarne le già avanzate conoscenze anche in ambito matematico. Altri esempi si hanno con la cultura degli Egizi, che nacque intorno al 3000 a.C. nell'Africa settentrionale, e quella dei Cinesi e degli Indiani, nate in Asia rispettivamente intorno al 3000 e al 2500 a.C. Esse svilupparono ed approfondirono le loro conoscenze, giungendo anche ad ottenere straordinari risultati, sempre nell'ottica di rispondere ad esigenze riguardanti necessità quotidiane: un efficiente sistema di numerazione e di calcolo per lo sviluppo dei commerci e per un efficace controllo organizzativo dello stato; conoscenze di geometria per la realizzazione di grandiosi edifici quali templi, costruzioni dedicate al culto o dimore reali; raffinamento dei calcoli astronomici per una navigazione più sicura e rotte più certe.

Significativo, in questo senso, può anche essere il fatto che il vocabolo geometria deriva dal greco ***ghe*** = ***terra*** e ***metron*** = ***misura*** e significa "misurazione della terra". Tale significato discende probabilmente dall'origine di questa disciplina, che molti storici ed esperti studiosi dell'antichità fanno discendere dall'esigenza degli antichi popoli di avere regole, anche rudimentali, per determinare la misura dei terreni.

La paternità di molte conquiste nei vari rami della scienza in generale e della matematica in particolare non sono facilmente attribuibili; non solo per ciò che riguarda l'autore, ma anche in relazione al primo ambiente culturale in cui sono maturate. Il percorso di tali conquiste risulta ambiguo perché mancante di testimonianze certe e di sicuri riferimenti temporali, ma è comunque chiaro che nell'antichità erano già noti molti teoremi o procedimenti di calcolo, alcuni dei quali ancora attualmente in uso.

Erodoto e Aristotele erano poco inclini a far risalire le origini della matematica a un'epoca anteriore a quella della civiltà egiziana.

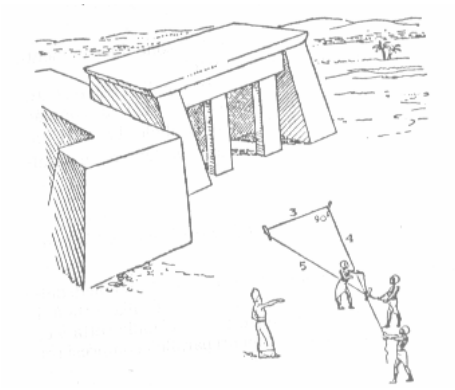
La civiltà dei faraoni è forse quella che più d'ogni altra ha influenzato le conoscenze della cultura greca, progenitrice della nostra attuale cultura, sia per ragioni di carattere storico e geografico, sia perché tale progredita civiltà diede vita ad un fiorente centro culturale in Alessandria d'Egitto. Al tempo dell'illuminato monarca Tolomeo I, che nel 306 a.C. riuscì a prendere saldamente il controllo della parte egiziana dell'impero greco, fu istituita ad Alessandria un'accademia, nota come il ***Museo***. Essa fu una vera e propria università dell'epoca, nata con primario scopo di ricerca e poi d'insegnamento. In questo luogo molti eminenti studiosi dell'antichità vennero chiamati ad insegnare e molti altri la frequentarono.

LA MATEMATICA IN EGITTO

Erodoto ed Aristotele ritenevano che le origini della matematica fossero attribuibili alla civiltà egiziana

Notizie concrete sulle conoscenze geometriche degli Egiziani ci pervengono, oltre che da Erodoto, storico greco del V secolo a.C., anche da Proclo, storico del V secolo d.C.: entrambi sostengono che gli Egiziani furono i primi inventori della geometria. Tale loro conoscenza era determinata dalla necessità di ricostruire i limiti dei campi e delle proprietà, dopo che le periodiche inondazioni del Nilo avevano cancellato i confini.

Gli Egiziani, come anche i Babilonesi che pare avessero conoscenze geometriche più approfondite di quelle egizie, per costruire angoli retti e, quindi, triangoli rettangoli e primitive squadre, utilizzavano una regola molto semplice: preso un pezzo di corda, tramite dei nodi segnavano su di essa alcuni punti; questi indicavano la suddivisione della corda in tre parti che stavano tra loro nel rapporto 3, 4 e 5.



Fissando questa corda sul terreno tramite dei paletti posti in corrispondenza dei nodi, e facendo in modo che i segmenti di corda restassero tesi, essi avevano costruito un triangolo rettangolo.

In questo modo gli agrimensori e gli architetti avevano a disposizione un angolo retto e quindi due lati perpendicolari: elementi utilissimi che servivano come traccia per costruire le fondamenta di monumenti, sacri templi, edifici e per la suddivisione dei terreni.

Erodoto afferma che, appunto per ridisegnare i confini delle proprietà, tra gli egizi erano molto ricercati gli agrimensori o “tenditori di corde”.

Secondo ipotesi più attuali, l’origine della geometria deve essere imputata a esigenze di carattere non pratico ma mistico o magico, cosa sostenuta a suo tempo già da Aristotele. Sembrerebbe, infatti, che per sole necessità pratiche non vi fosse l’esigenza di avere figure molto precise, come angoli perfettamente retti. Lo studio di figure rigorose sarebbe motivato da esigenze mistico-religiose: a questo proposito autorevoli storici osservano che il cerchio ed il quadrato erano figure sacre, studiate dai sacerdoti, al pari dell’astronomia, per avvicinarsi agli dei.

Tra i numeri 3, 4 e 5 si ha la relazione per cui $3^2 + 4^2 = 5^2$

Se i lati sono multipli di 3, 4 e 5 secondo uno stesso numero ***n*** si ha ancora un triangolo rettangolo e questa relazione è sempre valida.

Gli Egiziani attribuirono a queste terne numeriche un valore mistico.

In epoche molto remote anche gli Indiani e i Cinesi avevano osservato che per costruire un angolo retto si poteva utilizzare una corda divisa in parti lunghe 5, 12 e 13. Analogamente, con una corda divisa in parti lunghe 8, 15 e 17 si aveva lo stesso risultato: anche in questi casi sussistono le relazioni $5^2 + 12^2 = 13^2$ e $8^2 + 15^2 = 17^2$.

LA MATEMATICA GRECA
E
LE COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO

Nella penisola greca, fatta di strette vallate incastrate tra i monti e il mare, che non offre la possibilità di organizzarsi in grandi agglomerati urbani, nascono piccole comunità denominate *póleis*, ossia comunità costituite da una città e dal territorio circostante. È in questo contesto che gli uomini si sottraggono progressivamente all'autorità dei capi e diventano parte attiva del governo della loro città. Nascono in tal modo le leggi, cioè regole valide per tutti, e la politica, intesa come arte di governo, amministrazione del bene pubblico e organizzazione della vita sociale. La politica quindi cessa di essere, per la prima volta nella storia, un segreto religioso riservato a pochi individui eccezionali e ispirati dagli dei, per diventare attività del CITTADINO. Anche se la qualifica e i privilegi di cittadino non erano ancora estesi a tutti, lo sviluppo storico degli anni a venire avrebbe sempre fatto riferimento, volente o nolente, con quel nuovo tipo di società.

La libertà politica e religiosa consentì ai cittadini greci di dedicarsi alla meditazione e alla riflessione razionale sul mondo circostante: nascono così la filosofia e le scienze, che si fondano sulla ragione e affidano all'uomo la responsabilità delle scelte. Da questo panorama nasce il grandioso contributo dato dal mondo greco alla cultura universale.

L'approccio che i Greci avevano verso i vari aspetti della conoscenza, e in particolare della matematica, fu completamente diverso da quello fino allora adottato dalle altre civiltà. I Greci vedevano nello studio della geometria un esercizio per la mente e ne enfatizzavano la capacità di condurre l'intelletto a ragionamenti lineari e rigorosi. Per questo motivo, nel mondo ellenico, la geometria era particolarmente esaltata rispetto all'algebra, che era vista come uno strumento di calcolo da riservare a mercanti. La dedizione per lo studio delle proprietà delle figure, affrontato per il semplice piacere di ampliare le proprie conoscenze e come pura palestra per mente, e il rigore nel giustificare ogni affermazione fecero dei greci i primi grandi geometri dell'antichità.

Per i matematici dell'antica Grecia, fondamentale importanza avevano due strumenti: la riga e il compasso; un problema era risolubile solo se la soluzione poteva essere determinata attraverso una costruzione con riga e compasso.

Il compasso è uno strumento fondamentale nelle costruzioni geometriche e consente di disegnare una circonferenza con un determinato raggio: tale raggio è dato dalla distanza tra le estremità aperte di due aste che hanno l'altra estremità in comune. Le aste, che hanno la possibilità di ruotare attorno all'estremità comune, costituiscono il compasso e la distanza tra le estremità aperte è detta "apertura".

Il compasso, inoltre, serve per compiere un'altra importante operazione, indispensabile per i geometri dell'antichità, che consiste nel trasportare un segmento di lunghezza assegnata senza utilizzare il concetto di misura.

Tale strumento era usato solitamente insieme con la riga, costituita da una semplice asta priva di scala di misura, con la quale si poteva tracciare una linea retta passante per due punti dati.

I greci ammettevano solo figure che fossero costruite in modo elementare con un semplice gesto della mano. Nell'universo greco una figura poteva esistere solo se costruita mediante rette e cerchi.

Nell'uso di questi strumenti è forse sintetizzata la differenza tra il modo di pensare degli antichi matematici e la visone moderna, suggerita e permessa dagli attuali meccanismi di calcolo. Per gli antichi greci, infatti, qualsiasi numero era concepito come un segmento; pertanto essi utilizzavano un'algebra geometrica indubbiamente meno agevole del nostro attuale calcolo algebrico ma sicuramente altrettanto efficace.

Ad esempio, mentre oggi le grandezze vengono rappresentate da lettere che sono intese come numeri, noti o ignoti, sulle quali si opera con le tecniche dell'algebra moderna, al tempo dei greci le grandezze erano concepite come segmenti.

Nel linguaggio attuale rimane traccia dell'antica concezione in espressioni quali "elevare al quadrato" oppure "elevare al cubo" per leggere rispettivamente l^2 e l^3: le due scritture, infatti, erano intese come l'effettiva costruzione di un quadrato e di un cubo di lato l.

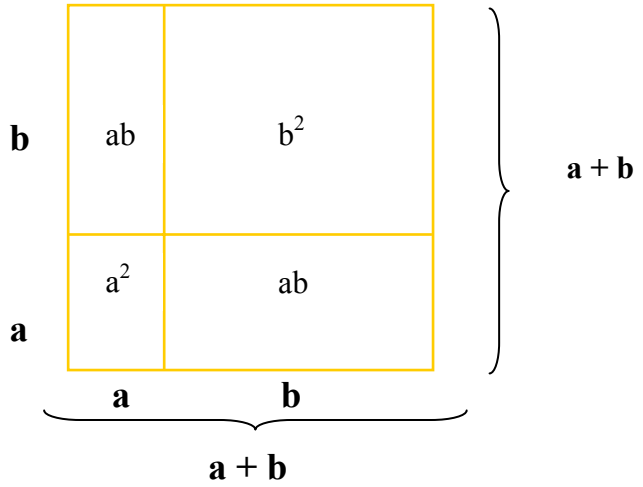
Sempre in quest'ottica, l'affermazione:

"***Se un segmento viene tagliato a caso, il quadrato costruito sull'intero segmento è uguale al quadrato costruito sui segmenti e al doppio del rettangolo delimitato dai segmenti***",

è un modo per descrivere l'attuale prodotto notevole:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

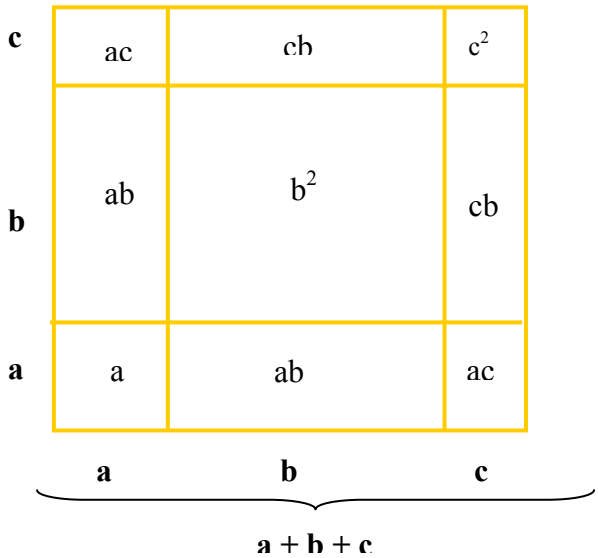
La corrispondente costruzione era la seguente:



Nella figura si vede come, costruiti due segmenti adiacenti, indicati con *a* e *b*, il quadrato di lato *(a+b)* possa essere scomposto in quattro parti: due quadrati, uno di lato *a* e uno di lato *b*, e due rettangoli di lati *a* e *b*.

In maniera analoga si ha, ad esempio, la corrispondenza tra il prodotto notevole relativo al quadrato di un trinomio e la seguente costruzione:

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$



I Greci, come già i Babilonesi, avevano affrontato il problema delle equazioni di 1° e 2° grado, ma sempre e soltanto dal punto di vista geometrico.

Un'equazione di primo grado **a.x = b** veniva affrontata con un'espressione del tipo seguente:

*"determinare quale altezza **x** deve avere un rettangolo di base data **a** affinché la sua area corrisponda al numero **b** assegnato".*

Per i Greci, dire che un'equazione del tipo **4.x = 3** avesse per soluzione $\mathbf{x} = \frac{3}{4}$

non aveva alcun significato; per loro, infatti, un'equazione poteva dirsi risolta solo quando si riusciva ad ottenere il **segmento soluzione.**

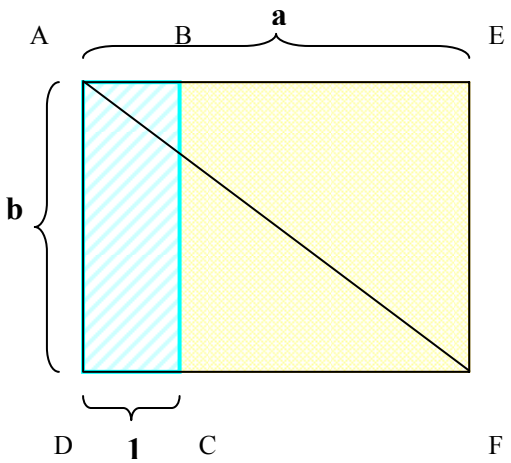
L'equazione precedente, pertanto, aveva la seguente interpretazione:

4.x = 3 diveniva **4.x = 3.1**

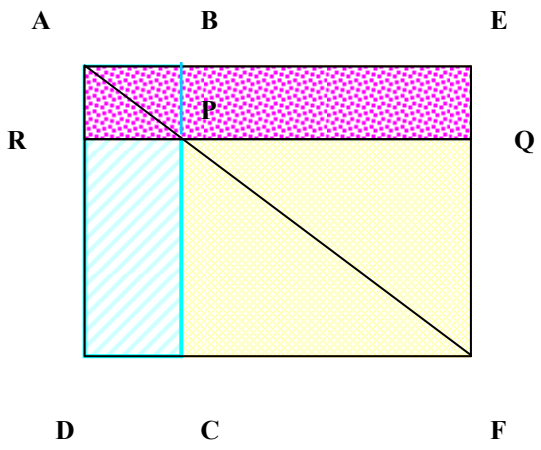
con 1 che rappresentava il segmento unitario di lunghezza arbitraria.

❖ La prima fase consisteva nel costruire i segmenti di lunghezza nota:

❖ La seconda fase consisteva nel costruire un rettangolo ABCD di area nota
b.u = 3.1= 3,
un rettangolo AEFD di area nota a.b = 3.4 = 12
e la diagonale AF della figura



❖ La terza fase consiste nel tracciare per il punto P, intersezione tra la diagonale AF e il segmento BC, il segmento parallelo alla base dei rettangoli. Si ottiene in tal modo il rettangolo AEQR equivalente al rettangolo ABCD.



Tali rettangoli sono equivalenti perché somma di figure equivalenti, infatti sono formati:

- dalla parte comune ABPR;
- dai rettangoli BEQP e RPCD, equivalenti per differenza di figure equivalenti. Infatti, le coppie di triangoli AEF e ADF, ABP e ARP, PQF e PCF sono equivalenti perché hanno base e altezza congruenti e, dall'osservazione della figura,

si ha:

BEQP = AEF – (ABP + PQF) e RPCD = ADF – (ARP + PCF).

Poiché il rettangolo AEQR ha il lato AE di misura **a**, significa che il segmento EQ è **x**, cioè il **segmento soluzione**.

IL PADRE DELLA GEOMETRIA: TALETE

Talete nacque e visse a Mileto, città dell'Asia Minore, fra il VII e VI secolo a.C. e probabilmente non scrisse nessuna opera, per cui di lui si hanno solo notizie tratte da altri autori o da racconti.

Figura 1 Urania, musa dell'astronomia, e Talete - Antonio Canova

La sua figura, infatti, ben presto sfumò nella leggenda.

Platone lo ricorda come una persona abilissima ad escogitare espedienti tecnici, mentre lo storico greco Erodoto racconta che Talete progettò e realizzò un canale per deviare un fiume e farlo rientrare nel suo alveo.

Erodoto, poi, gli attribuisce una grande abilità come consigliere politico e anche la predizione di un'eclisse solare: proprio di quella eclisse che indusse gli eserciti della Media e della Lidia, già pronti alla battaglia, a deporre le armi. Talete, dopo questa predizione, divenne famoso in tutto il mondo ellenico, tanto da essere annoverato tra i sette saggi dell'antica Grecia.

A Talete sono attribuite, da autori di epoche successive, le dimostrazioni di alcuni importanti teoremi di geometria, mentre pare che durante una sua permanenza in Egitto egli sia riuscito a calcolare l'altezza delle piramidi tramite le ombre.

Platone, in uno dei suoi dialoghi dialettici dal titolo *Teeteto*, racconta che Talete, nel contemplare le meraviglie del cielo, cadde in un pozzo e una schiava che aveva assistito alla scena lo derise, perché tanto era l'interesse dello studioso per il cielo che non vedeva neppure cosa c'era in terra.

Aristotele, invece, nella sua opera *Politica*, narra che Talete, grazie alle sue conoscenze astronomiche e meteorologiche, previde un abbondante raccolto d'olive; egli fece quindi incetta di frantoi e da questa situazione di monopolio ricavò grandi guadagni.

Come si può notare si tratta di testi frammentari e alle volte anche contraddittori: infatti, da un lato il cadere in un pozzo accrediterebbe l'immagine di uno studioso preso solo dalle sue ricerche; mentre il passo di Aristotele, al contrario, suggerirebbe l'immagine di un erudito che sapeva mettere a frutto le conoscenze acquisite per ingrandire il proprio patrimonio personale.

Nel contempo, però, alcuni successi scientifici a lui attribuiti sarebbero facilmente contestabili: con le conoscenze astronomiche del tempo, infatti, sarebbe stato molto difficile predire un'eclisse di sole; cosa che richiedeva calcoli matematici molto complessi e che all'epoca non potevano effettuare neppure gli astronomi babilonesi.

Al tempo di Talete i ruoli di filosofi e scienziati tendevano a confondersi e Aristotele, nel suo libro dal titolo *Metafisica*, sostiene che Talete avesse una teoria sull'origine dell'universo secondo la quale l'acqua era al principio di tutte le cose.

Oggi, non è possibile sapere per quale ragione Talete abbia assunto tale posizione, ma si può pensare che derivasse da una attenta osservazione della vita e dall'importanza che l'acqua riveste in essa.

Più precisamente Talete sosteneva che la terra galleggiava sull'acqua: ossia, le terre emerse, contenenti delle acque interne, avrebbero galleggiato su un grande oceano. Si tratta, probabilmente, di miti d'origine orientale poiché proprio dall'Oriente arrivava la credenza che la terra galleggiasse su un immenso oceano.

Secondo fonti antiche, Talete avrebbe appreso la geometria in Egitto, dove si sarebbe recato a studiare; in particolare, secondo un frammento di Giamblico, Talete avrebbe esortato Pitagora ad andare in Egitto e a frequentare i sacerdoti di Menfi e di Diospoli perché da essi avrebbe imparato molto di ciò che a lui aveva dato fama di sapiente.

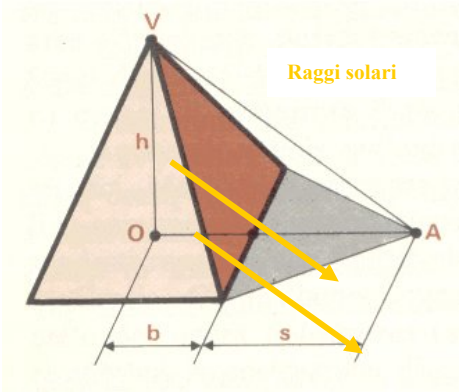
In questo contesto, si diffuse anche la leggenda secondo cui Talete sarebbe riuscito a calcolare l'altezza delle piramidi partendo dall'ombra da esse prodotta; così come, sempre secondo la leggenda, avrebbe misurato l'altezza di un obelisco con la misurazione dell'ombra del bastone che portava con sé. Talete, infatti, pensò che se il bastone era lungo, ad esempio, i tre quarti della sua ombra, la stessa situazione valeva anche per l'obelisco, per cui gli fu sufficiente misurare l'ombra del monumento e dedurne poi le dimensioni reali.

Plinio, nella sua *Historia Naturalis,* riferisce che Talete avrebbe calcolato l'altezza della piramide misurandone l'ombra nel momento in cui quest'ultima era esattamente uguale al corpo che la proiettava.

Diversamente Plutarco scrive che Talete avrebbe utilizzato un metodo differente: egli avrebbe piantato un bastone sul limite dell'ombra proiettata dalla piramide. In tal modo, la linea che rappresenta il raggio del sole, sfiorando il vertice della piramide e la punta del bastone generava due triangoli: Talete sarebbe riuscito a dimostrare che tra la piramide e il bastone c'era la medesima proporzione esistente tra ombra e ombra.

In ogni caso, dal momento che non poteva misurare direttamente l'altezza della piramide di Cheope, Talete trovò un alleato nel sole, come nel caso dell'obelisco. Egli osservò attentamente l'ombra proiettata al suolo dal proprio corpo e il suo progressivo ridursi man mano che il sole saliva sull'orizzonte. Talete suppose, poi, che i raggi del sole, data la lontananza dell'astro dalla terra, fossero paralleli tra loro. A questo punto egli dedusse che, poiché il sole tratta tutti i corpi allo stesso modo, il rapporto tra la sua statura e la lunghezza della propria ombra sarebbe stato uguale al rapporto tra l'altezza della piramide e l'ombra che essa proiettava. Non solo, Talete pensò anche che nel momento in cui la sua altezza fosse stata uguale alla lunghezza della propria ombra, ciò sarebbe accaduto anche per la piramide, per cui poteva conoscerne l'altezza effettuando una misurazione indiretta: la lunghezza dell'ombra proiettata dalla piramide sul suolo; ombra che corrispondeva alla lunghezza dell'asse della piramide e quindi della sua altezza.

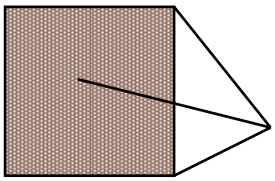
Talete, però, in una verosimile ricostruzione di ciò che accadde in base ai racconti e alle leggende tramandate, dovette risolvere diversi problemi di natura pratica e teorica. Nel momento in cui la piramide proietta la propria ombra, solo la parte di ombra che si estende al di fuori della base della piramide risulta accessibile e quindi misurabile; mentre la parte di ombra che corre lungo i gradoni della piramide stessa è inaccessibile, quindi non misurabile. Inoltre, per poter avere una situazione in cui l'altezza *OA* della piramide è data dalla somma dei segmenti



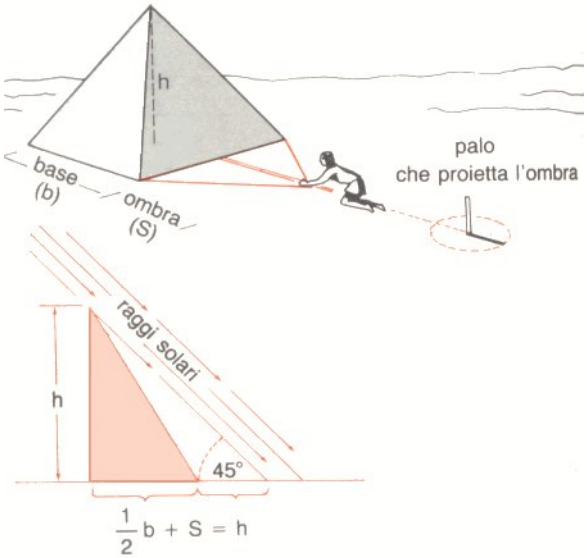
b = metà del lato di base e

s = lunghezza dell'ombra,

l'ombra della piramide non poteva avere una direzione arbitraria. Erano da scartare, quindi, situazioni in cui l'ombra della piramide risultasse obliqua rispetto al lato di base.



Per tale motivo, Talete dovette attendere che i raggi del sole provenienti dal vertice della piramide fossero anche diretti perpendicolarmente al lato di base di una faccia della piramide stessa. La situazione geometrica relativa all'osservazione reale sarebbe stata la seguente:

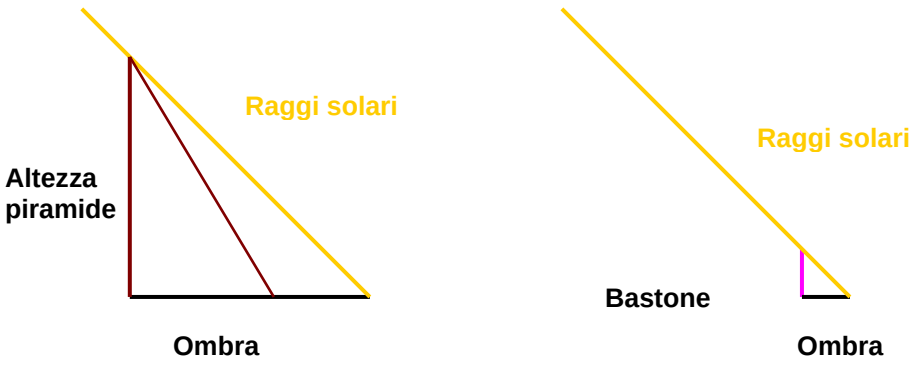


- l'ombra deve avere lunghezza uguale all'altezza della piramide, quindi i raggi del sole devono avere un'inclinazione di 45° sull'orizzontale, ossia rispetto al terreno
- l'ombra deve essere perpendicolare al lato di base, quindi diretta da nord a sud.

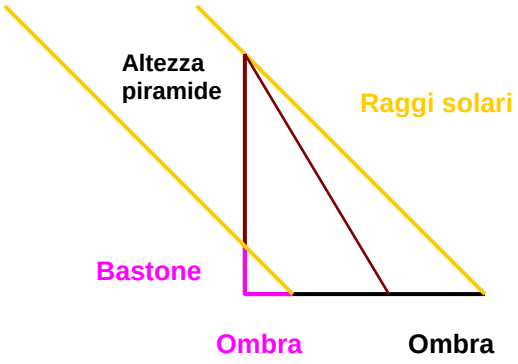
In base al calcolo degli astronomi, la misurazione di Talete poté essere effettuata solo il 21 novembre o il 20 gennaio, anche perché negli altri periodi i raggi del sole sono troppo verticali e quindi non viene proiettata alcuna ombra utile.

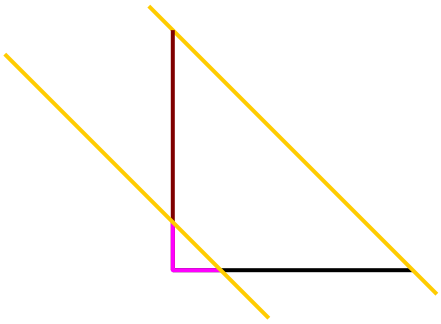
Talete, poi, prese come riferimento un bastone piantato al centro di una circonferenza di raggio uguale alla lunghezza del bastone stesso: nel momento in cui l'ombra del bastone arrivò a toccare la circonferenza, cioè nel momento in cui la lunghezza del bastone era uguale alla lunghezza della sua ombra, Talete segnò sulla sabbia il punto in cui arrivava l'ombra della piramide.

Schematizzando ulteriormente la situazione, il risultato è il seguente:



Quindi anche:





Dalla figura precedente, semplificando ancora, si ottiene la situazione rappresentata a fianco, nota come la costruzione relativa appunto al Teorema di Talete.

Anche secondo quanto scritto da Proclo nei suoi commentari su Euclide, Talete avrebbe appreso la matematica in Egitto, ma l'importanza di Talete consiste nel fatto che, mentre presso gli antichi popoli erano risolti problemi anche complicati ma limitati a casi particolari, egli avrebbe dato una base logica ai risultati appresi, cercando di coglierne i principi generali. A Talete vengono attribuiti le seguenti dimostrazioni ed enunciati geometrici:

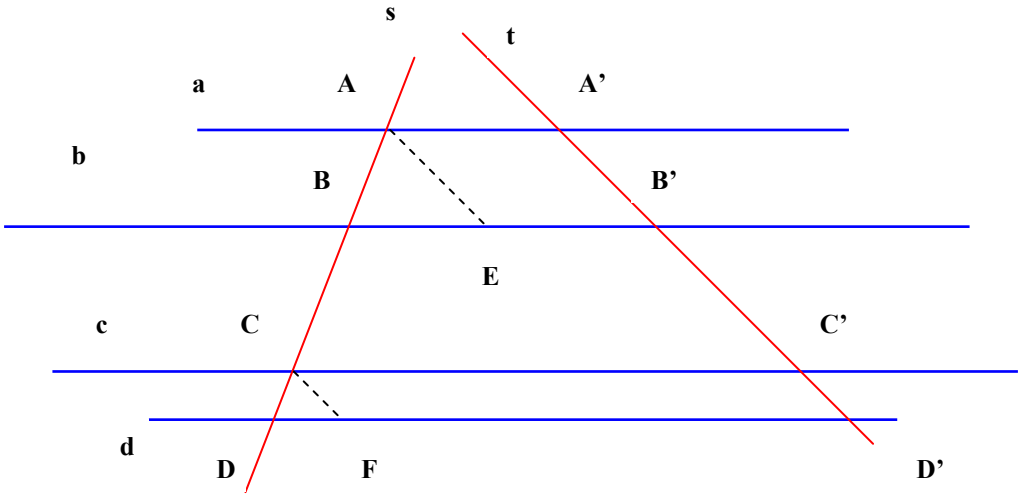
- Le coppie di angoli al vertice formati da due rette che si intersecano sono uguali (teorema degli angoli opposti al vertice);

- Se due triangoli sono tali che due angoli e un lato di uno di essi siano uguali rispettivamente a due angoli e a un lato dell'altro, i triangoli sono congruenti (Secondo criterio di congruenza dei triangoli).

- Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali;

- Un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali stacca su queste coppie di segmenti direttamente proporzionali.

Questo è il teorema noto come TEOREMA DI TALETE.



- Un angolo inscritto in un semicerchio è un angolo retto;

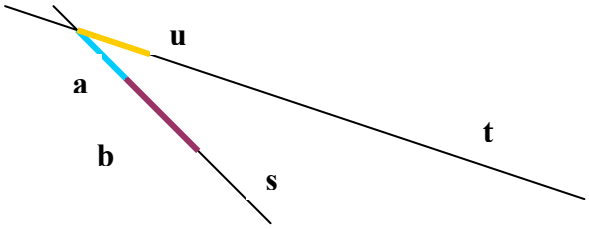
- Un cerchio viene diviso in parti uguali dal suo diametro;

Le soluzioni di equazioni del tipo **a.x = b** potevano essere ottenute anche utilizzando il Teorema di Talete.

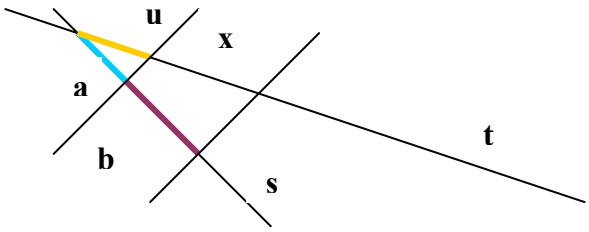
Dopo aver nuovamente interpretato l'equazione data come **a.x = b.1,** questa scrittura può essere vista come il prodotto dei medi e degli estremi di una proporzione del tipo

$$1 : x = a : b$$

A questo punto, date due qualsiasi rette, ***s*** e ***t***, su una di esse si devono riportare in successione i segmenti noti **a** e **b**, mentre sull'altra si riporta il segmento unitario **u,** di lunghezza arbitraria.



Dopo aver tracciato la retta passante per gli estremi dei segmenti **a** e **u**, la retta passante per l'estremo di b e parallela alla precedente retta individua su **t** il segmento **x** cercato.



IL PADRE DELL'ALGEBRA: DIOFANTO

CHI ERA

Il matematico greco Diofanto di Alessandria, chiamato in seguito il "padre dell'algebra", visse nel III secolo d.C. e della sua vita si conosce ben poco. Si sa però a quanti anni morì, perché è stato ritrovato un indovinello biografico-matematico inciso come epitaffio sulla sua tomba. Ci sono tuttavia diverse teorie sull'autore: alcuni ritengono che Diofanto stesso abbia scritto l'indovinello, altri pensano che sia stato suo figlio o un suo ammiratore.

Ad ogni modo l'epitaffio recita così:

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitae illius, mira denotat arte tibi. Egit sex tantem juvenie; lanugine malas vestire hinc coepit parte duodecima. Septante uxori post haec sociatur, et anno formosus quinto nascitur inde puer. Semissem aetatis postquam attigit ille paternae, infelix subita morte peremptus obit. Quator aestater genitor lugere superstes cogitur, hinc annos illius assequere.

Traduzione:

Questa tomba rinchiude Diofanto e, meraviglia! dice matematicamente quanto ha vissuto. Un sesto della sua vita fu l'infanzia, aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza. Inoltre per un settimo ebbe moglie, e dopo cinque anni di matrimonio ebbe un figlio. L'infelice morì improvvisamente quando raggiunse la metà dell'età paterna. Il genitore sopravvissuto fu in lutto per quattro anni e raggiunse infine il termine della propria vita.

La soluzione dell'enigma sta nella seguente equazione:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+5+4=x \Rightarrow x=84$$

Prima pagina del primo volume dell'Arithmetica di Diofanto

Se l'indovinello fosse storicamente giusto, Diofanto morì all'età di 84 anni.

Egli ebbe grande influenza sul pensiero algebrico arabo e può considerarsi il fondatore del ramo dell'analisi che prende il nome di ***analisi diofantea***.

COSA HA FATTO

E' merito di Diofanto l'introduzione di una prima forma di simbolismo nell'algebra, quindi dell'avvio all'**algebra sincopata**, e l'uso di potenze superiori al cubo, generalmente rifiutate dai greci classici perché prive di significato geometrico. Il suo contributo più importante consiste nello studio delle equazioni indeterminate. La sua fama è legata ad un lavoro sulla teoria dei numeri dal titolo "***Arithmetica***": una raccolta di 130 problemi che conducono alla risoluzione di equazioni di 1° e 2° grado in una o più incognite, di cui egli accetta, però, solo le soluzioni razionali positive.

L'***Arithmetica*** di Diofanto, è un trattato le cui caratteristiche sono raffinatezza e ingegnosità matematica.

Fino ad allora, come si è detto, il linguaggio dell'algebra non era quello che si conosce oggi: si utilizzavano i termini del parlare comune e all'attuale efficace linguaggio sintetico si è arrivati per gradi. Secondo una lenta evoluzione, che si è andata progressivamente affermando in modo non molto preciso dal punto di vista storico, si possono distinguere, con una grossolana semplificazione, tre fasi fondamentali:

- ***retorica*** o ***primitiva***, in cui tutto era descritto a parole;
- ***sincopata*** o ***intermedia***, in cui si cominciano ad adottare alcune abbreviazioni;
- ***simbolica*** o ***finale.***

L'opera di Diofanto si colloca nel secondo livello, perché in ogni parte dei sei libri dell'***Arithmetica*** si fa un uso sistematico di abbreviazioni, sia per indicare le potenze dei numeri, sia per esprimere relazioni ed operazioni.

Per questo motivo, legato quindi più alla forma che al contenuto dell'opera, Diofanto può essere considerato il padre dell'algebra.

Purtroppo ci restano solo sei dei tredici libri originari. Questa opera fu commentata da tutta una schiera di matematici antichi e bizantini, fra i quali Ipazia di Alessandria, Massimo Plaude e Giorgio Pachimere.

BREVE EVOLUZIONE DEL SIMBOLISMO

Diofanto introduce l'idea di indicare con **S** l'incognita e con lettere diverse le potenze dell'incognita:

Δ rappresenta il quadrato dell'incognita,
K rappresenta il cubo dell'incognita,

e la sua opera darà inizio al simbolismo moderno.
Probabilmente nel XV secolo, cominciarono ad essere usate le lettere ***p*** e ***m*** per indicare le operazioni di somma e sottrazione, mentre i simboli + e – vennero introdotti dai tedeschi che ne facevano uso per rappresentare i pesi in eccesso e in difetto delle cassette; tali simboli vennero utilizzati nei manoscritti solo a partire dalla fine del XV secolo.
Nel 1544 compaiono le partesi tonde.
Nel 1557 venne adottato l'uso del segno = inventato da Robert Recorde; egli affermava di non conoscere cose più simili tra loro di due rette parallele che, quindi, potevano essere adottate per rappresentare il concetto di uguaglianza.
Nel 1593 compaiono le parentesi quadre e graffe introdotte da F. Viète (1540 – 1603).
I simboli < e > sono dovuti a Thomas Harriot (1560 – 1650).
Il simbolo della radice fu introdotto da Cartesio (1596 – 1650).

L'uso del simbolismo per l'incognita e per le potenze dell'incognita ebbe un'evoluzione sorprendentemente lenta:

- agli inizi del XVI secolo i matematici come Luca Pacioli (1445 – 1514) si riferiscono all'incognita chiamandola ***radix***, ***res*** o ***coss*** = cosa in tedesco; e nel libro *l'Ars Magna*, Cardano (1501 – 1576) indica l'incognita come ***rem ignotam***. I simboli e le notazioni utilizzate per indicare l'incognita variano in continuazione e forse una delle più utilizzate era la lettera R, iniziale del vocabolo *res*.
  La seconda potenza dell'incognita, quindi x^2, era indicata dalla lettera **Z**, dal vocabolo zensus, ed era detta *quadratum* o *censum*; la terza potenza dell'incognita, cioè x^3, era invece detta *cubus* e denotata con la lettera **C**.

- verso la fine del XVI secolo, F. Viète fu il primo ad usare sistematicamente le lettere, non soltanto per indicare le incognite o le sue potenze, ma anche come coefficienti generali di un'equazione.

- Alcuni miglioramenti nell'uso delle lettere vennero poi introdotti da Catesio, che usava le prime lettere dell'alfabeto per indicare le quantità note e le ultime per indicare le quantità incognite.

Infine Leibniz (1646 – 1716) introdusse il punto come simbolo di moltiplicazione e il simbolo del due punti : per quello di divisione. Fu poi merito suo se il simbolo per l'uguaglianza usato da Recorde prese campo ed ebbe la meglio rispetto a quello utilizzato da Cartesio.

Solo alla fine del XVII secolo, però, si impose tra i matematici il sistematico uso del simbolismo, sia per l'acquisita consapevolezza della sua effettiva utilità nelle notazioni e nei calcoli, sia per la generalità che essa permette di conferire.

EQUAZIONI DIOFANTEE

Equazioni, non necessariamente di primo grado, per le quali si cerchino come soluzioni soltanto numeri interi, prendono il nome di ***diofantine***, in quanto fu proprio Diofanto a dedicarsi con particolare impegno allo studio di tali equazioni. Egli si occupò soprattutto di quelle indeterminate e in realtà non cercava soluzioni intere bensì razionali. Le equazioni diofantine, in molti casi, ammettono un numero discreto, cioè finito, di soluzioni, ricavabili con un numero finito di tentativi. Una tipica equazione diofantina è del tipo:

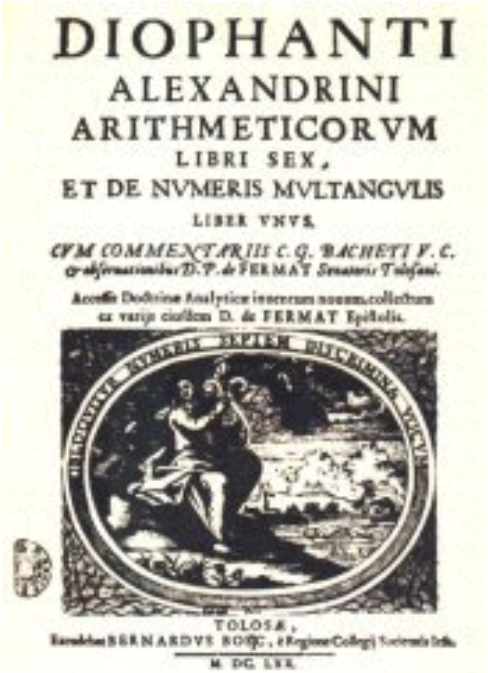

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS,
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
TOLOSÆ,
M DC LXX

Figura 2 Frontespizio dell'opera diofantea Arithmetica nell'edizione contenente gli appunti di Fermat

$$ax + by = c \qquad a, b, c \in \mathbb{N}$$

Si dimostra che se ***c*** è divisibile per il massimo comun divisore di ***a*** e ***b*** l'equazione è risolubile e dà luogo a soluzioni intere discrete. Ad esempio, l'equazione

$$4x + 3y = 24$$

dà, nel campo dei numeri interi e positivi, la sola soluzione

$$x = 3, \qquad y = 4.$$

Forse l'equazione diofantina più famosa è del tipo:

$$x^n + y^n = z^n \qquad x, y, z, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Nel caso ***n* = 2** essa dà come soluzioni intere le cosiddette "terne pitagoriche", nel caso invece $n \geq 2$ essa ha dato il mal di testa per secoli a miriadi di matematici.

Nel 1640, il matematico Pierre Fermat leggendo il libro l'***Arithmetica*** di Diofanto, in un'edizione del 1621, annotò sul margine un'osservazione:

" *dividere un cubo in due cubi, o in generale una potenza n-esima in due potenze n-esime, è impossibile se n è maggiore di 2: ho trovato una dimostrazione veramente notevole di ciò, ma il margine di questa pagina è troppo stretto per contenerla*".

Tale affermazione divenne nota con il nome di ***Ultimo Teorema di Fermat*** ed è rimasto fino ad oggi uno dei più famosi teoremi della matematica.

Figura 3 Ritratto di Fermat

Pierre Fermat: un tranquillo magistrato di provincia; uno spirito libero tra volumi di matematica.

Pierre de Fermat nacque in Francia, probabilmente il 20 agosto 1601. Veniva da una famiglia d'origini nobili e conseguì la laurea in diritto all'Università d'Orléans. Egli ricoprì importanti incarichi pubblici e presto acquisì prestigio a Parigi per le sue doti matematiche, specialmente per la scienza dei numeri e la bella geometria. A lui si attribuiscono scoperte appartenenti a vari rami della matematica attuale ed è stato il fondatore della moderna teoria dei numeri.
Amico di molti grandi matematici dell'epoca, quali François Viète e Bonaventura Cavalieri, con i quali intrattenne contatti epistolari, Fermat sapeva unire la padronanza delle lingue classiche con la ricerca scientifica. Egli, tra le altre attività, iniziò anche a ricostruire alcuni testi elencati nel libro *Collectiones mathematicae*, annotando nei suoi lavori molte "invenzioni numeriche".
Alla morte di Fermat, avvenuta il 12 gennaio 1665, in seguito ad un'epidemia di peste, gran parte delle sue ricerche erano sparse in mezza Europa. Il figlio, Clément-Samuel, fece pubblicare una nuova edizione dell'Arithmetica, nella traduzione latina di C. Bachet, includendovi anche gli appunti del padre. Le ricerche sui manoscritti di Fermat sollevarono l'interesse di molti studiosi e di collezionisti di testi inediti; tra quelli ritrovati, alcuni furono messi a disposizione dello studioso Charles Henry che, insieme a Paul Tannery, curò la pubblicazione dei quattro volumi delle *Oeuvres de Fermat* seguiti da un quinto, *Supplément*.
Nel corso degli anni i migliori matematici s'impegnarono nella ricerca della soluzione del teorema da lui proposto e riuscirono ad ottenere diversi risultati. In successione si ebbero le seguenti, importanti, dimostrazioni:

- per n = 3 Eulero nel 1753; caso particolare che servì come base per successive dimostrazioni;
- per n = 5 Dirichelet e Legendre, nel 1825;
- n =7 Lamé, nel 1839;
- per ogni n < 100 Ernst Eduard Kummer, fra il 1847 e il 1857;
- per ogni n < 125.000 nel 1980;

ma mancava sempre una dimostrazione generale.
Ad aprire la strada verso questo obiettivo fu l'osservazione che il teorema di Fermat richiede soluzioni intere di equazioni del tipo

$$a^n + b^n = c^n$$

Da questa scrittura, dividendo ambo i membri per c^n, si avrebbe:

$$\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} = 1$$

cioè, applicando le proprietà delle potenze,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1$$

In questo modo si tratta di determinare soluzioni razionali di equazioni del tipo

$$\mathbf{X^n + Y^n = 1}$$

Anche seguendo questa strada, solo nel 1985 i matematici Andrew Granville e Roger Heath-Brown riuscirono a stabilire la veridicità del teorema per quasi tutti i valori di n. Poiché però nel linguaggio matematico l'espressione "quasi tutti" non ha lo stesso significato di "tutti", si deve attendere il 1995 perché Andrew Wiles, matematico inglese con una cattedra all'università di Princeton, esponga la sua dimostrazione della congettura di Fermat.

Il lavoro è lungo circa un migliaio di pagine ma non è ancora completo: Wiles riesce a completare la dimostrazione due anni dopo, con una pubblicazione che solo poche centinaia di persone al mondo sono in grado di comprendere.

Figura 4 Andrew Wiles mentre, nel 1993, presenta i risultati della sua ricerca

Al giorno d'oggi ancora una grande congettura tiene impegnati i cervelli dei grandi matematici del mondo: la ***Congettura di Goldbach*** (1690–1764). Christian Gldbach, matematico tedesco vissuto in Russia, nel 1742 inviò al collega Leonhard Euler una lettera nella quale affermava:

ogni numero pari diverso da due, è la somma di due numeri primi

Cioè vale la relazione per cui, ad esempio,

4= 2 + 2	12 = 7 + 5
6 = 3 + 3	16 = 13 + 3
8 = 5 + 3	30 = 23 + 7

Nel 2000, allo scopo di pubblicizzare il libro "*Lo zio Petros e la congettura di Goldbach*" di Apostolos Doxiadis, l'editore britannico Tony Faber offrì un premio di 1.000.000 dollari per una dimostrazione della congettura. Il premio sarebbe stato assegnato solo per dimostrazioni inviate entro aprile 2004. e non fu mai reclamato.

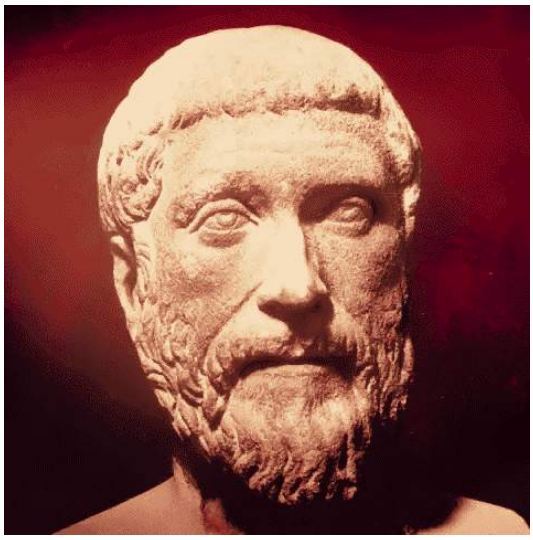
Oggi è **questo** il motivo che procura ai matematici del mondo **frequenti emicranie!**

PITAGORA DI SAMO e LA SCUOLA PITAGORICA

Pitagora di Samo (571-496 a.C.) fondò a Crotone una scuola che vedeva in lui il depositario di una sapienza misteriosa e divina. Egli, sommo erudito e carismatico insegnante, dotò la scuola, simile ad una setta, di ferree e alquanto originali regole di natura mistica e religiosa, che sembra prevedessero l'uso della pena di morte per i trasgressori.

Pitagora, capo indiscusso dell'associazione, non poteva essere contraddetto e per lui, infatti, era stato coniato il famoso detto "**ipse dixit**".

Di Pitagora non si hanno molte notizie, ma da queste emerge una complessa figura di *sapiente*, un saggio che da Samo, in Ionia, si trasferì nel sud dell'Italia, intorno al 530 a.C.. Questo accadde per ragioni non chiare: forse perché egli temette persecuzioni da parte del tiranno Policrate, del quale mal sopportava il clima politico; forse per il minaccioso profilarsi di un'invasione persiana, dato che Ciro aveva già assoggettato la Lidia nel 546 a.C. Nell'antica Magna Grecia, nella città di Crotone, la scuola da lui fondata e denominata ***Scuola Italica***, giunse rapidamente ad esercitare una forte influenza sul potere politico. Questo accentramento del potere, però, andò presto a scontrarsi con i fondamenti della mentalità politica greca e, nel 500 a.C., la loggia dei Pitagorici a Crotone fu incendiata. Nell'evento perirono la maggior parte dei notabili della setta e, secondo alcuni, anche lo stesso Pitagora, mentre appare più probabile che egli morisse a Metaponto intorno al 495 a.C. Pitagora, all'interno della scuola, deteneva il potere assoluto di scegliere gli allievi ai quali trasmettere il suo sapere. Egli li classificava in due gruppi: quelli appena entrati, detti ***acusmatici***, che ascoltavano le dottrine, e quelli già addentro ai misteri, chiamati ***matematici***. Gli acusmatici erano gli iniziati, coloro ai quali, per la durata di cinque anni, veniva concesso solo ed esclusivamente di ascoltare le lezioni, senza interloquire e senza nemmeno vedere la persona del maestro. I matematici erano i pochi che, dopo aver dimostrato di essere in grado di apprendere e mantenere il silenzio mistico, potevano partecipare attivamente agli incontri, essendo stati informati della dottrina vera e propria, segreta e insindacabile.



Dei viaggi di Pitagora in Oriente e in Egitto, narrati dalla tradizione, non si hanno riscontri certi; mentre è pressoché sicuro che gli scritti attribuitigli siano in realtà apocrifi. Ciò che si conosce con maggior precisione proviene dal nuovo pitagorismo degli ultimi anni della repubblica romana e dell'inizio dell'era cristiana. Una di queste testimonianze è il documento, andato perduto, *Vita di Pitagora* di Apollonio di Tiana (30/40 d.C), che fu alla base delle omonime composizioni dei neoplatonici Porfirio (233-305) e Giamblico (245-325). La figura di Pitagora rimane quindi oscura, sia perché i documenti del tempo e le biografie che lo riguardavano sono andate perdute, sia perché la setta da lui fondata, già segreta, metteva in comune le conoscenze e questo impedisce una sicura attribuzione della paternità delle scoperte effettuate.

La dottrina di Pitagora si fonda su diversi aspetti.

1. L'aspetto religioso

La sola dottrina che gli si può attribuire con certezza è quella della ***metempsicosi***, ossia della trasmigrazione dell'anima (sema), dopo la morte, in corpi d'altri esseri, anche animali. Il corpo (soma) è "*la prigione dell'anima*": dunque si deve sfuggire alle influenze negative del corpo per mezzo di riti di purificazione, ai quali la filosofia può contribuire in modo significativo. La metempsicosi consentirebbe, dopo vari passaggi o trasmigrazioni, la liberazione finale dal ciclo di nascite e morti.

Un altro elemento di natura religiosa è la concezione del sapere (*sophia*) come fatto spirituale: al sapere, come dispensato da un oracolo, si giunge tramite la conoscenza, acquisita dallo studio di materie quali la matematica, l'astronomia, la musica, la medicina, ecc.

Il sapere è lo sforzo verso la saggezza, inteso come "**elevazione morale**": come il corpo è purificato dalle abluzioni e dal mangiar sano, così l'anima si libera dalle brutture del vizio e degli appetiti terreni con la contemplazione delle armonie ideali, con la musica e la matematica.

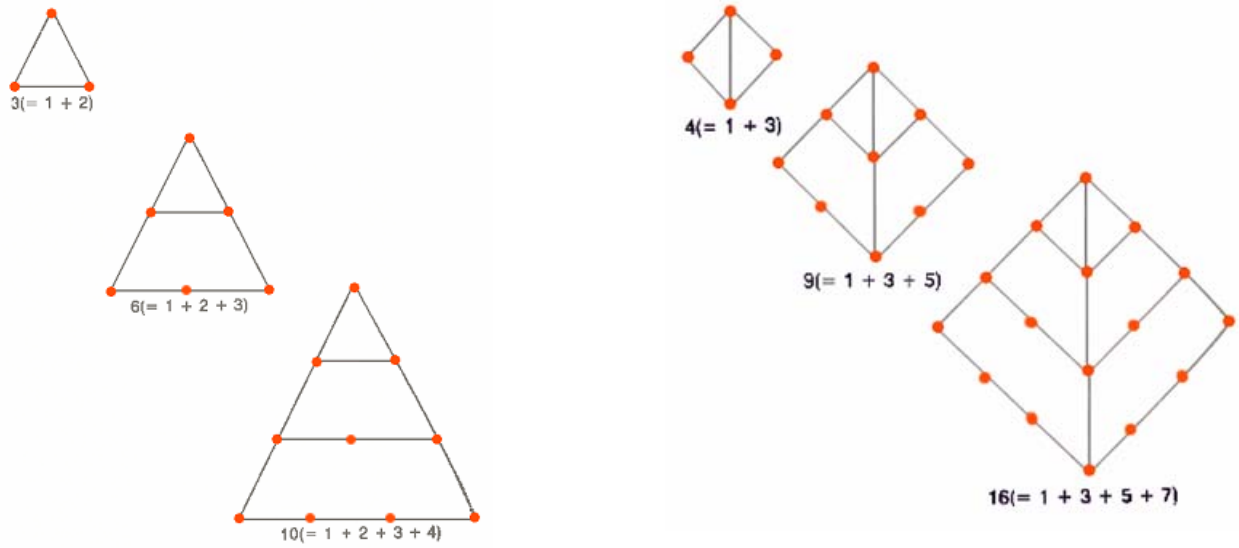
Si può notare, anche in questo caso, come sia caratteristico del pensiero greco che l'attività artistica e scientifica, verso il bello e il vero, assumano un significato religioso.

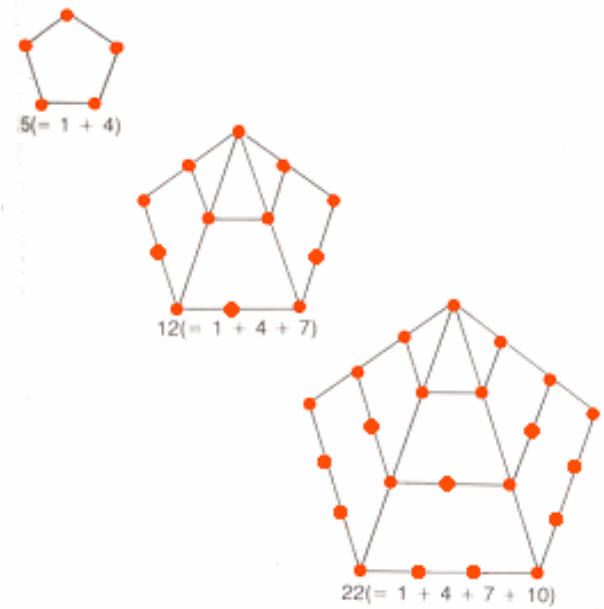
2. L'aspetto filosofico-matematico

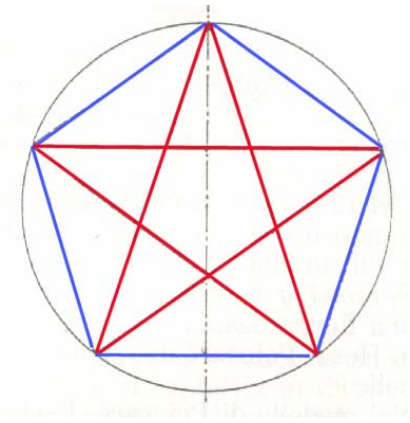
I Pitagorici sono ritenuti i creatori della matematica come scienza: essi consideravano il numero come l'essenza delle cose e tale concezione era sintetizzata nell'espressione **"tutto è numero".**

I NUMERI E LA GEOMETRIA

Secondo i pitagorici tutti i corpi erano formati da punti materiali, detti monadi, disposti secondo un preciso ordine geometrico: la struttura dei punti, con il suo ordine, formava un'entità che poteva essere assimilata ad una forma-numero. Per questo motivo i numeri erano suddivisi in "numeri triangolari", "quadrati", "pentagonali" e così via secondo le figure geometriche che una loro disposizione sul piano poteva comporre:







Una delle forme-numero più apprezzate dai pitagorici era il "***pentacolo***": la stella a cinque punte ottenuta tracciando le diagonali di un pentagono regolare. Tale figura, che ha la fantastica proprietà di autorigenerarsi, nel senso che la sua costruzione può essere ripetuta all'infinito in dimensioni progressivamente ridotte, venne eletta a simbolo della scuola pitagorica ed era indicata come **Silus Pythagorae**. La scelta di questa figura fu determinata dal fatto che in essa è contenuto, sotto molteplici aspetti, uno dei più singolari e artistici numeri che la matematica abbia mai scoperto e che la natura e l'ingegno umano abbiano mai utilizzato: il ***rapporto aureo***.

I NUMERI E IL MONDO FISICO

La concezione pitagorica dei numeri, accanto all'aspetto geometrico, possedeva anche quello fisico: il punto, elemento base delle cose, era concepito come un minuscolo corpo di grandezza non nulla. Dalla configurazione assunta da questi punti, sia quantitativa che di posizione, dipendevano tutte le proprietà dei corpi. Una scoperta che rafforzò le idee dei pitagorici relativamente all'importanza rivestita dai numeri nella concezione fisica del mondo riguardò la musica.

Pitagora, infatti, pur essendo noto per il teorema che porta il suo nome, ma che, come si è visto, era già conosciuto in tempi più antichi, aveva fatto una fantastica scoperta relativa alla suddivisione di una corda musicale. Dopo questa rivelazione incominciò ad investigare il rapporto tra i numeri e da qui giunse al rapporto aureo. Rifacendosi alla leggenda, Pitagora stava un giorno giocherellando con un monocordo, una sorta di chitarra con un'unica corda, e ne faceva variare la nota emessa muovendo un ponticello per la lunghezza della corda stessa. Egli osservò che quando il ponticello era posizionato in modo tale da dividere la corda secondo rapporti semplici, ossia rapporti di numeri naturali, le note emesse erano straordinariamente piacevoli, come nel caso della suddivisone che lasciava tre quinti di corda da una parte del ponticello e due quinti dall'altra: divisione che costituisce il molto apprezzato ***accordo di quinta***. Per Pitagora, quindi, suonare era un'azione matematica: l'armonia della matematica era rappresentata dall'armonia del monocordo, la quale era un esempio dell'armonia "matematica" d'ogni altra forma di bellezza e dell'intero cosmo.

Se le cose sono fatte di numeri, il mondo è una sorta d'ordine misurabile: i numeri privilegiati si dovranno trovare nelle misure dell'universo e nelle distanze tra i corpi celesti e dai loro semplici rapporti dovrà derivare ***un'armonia delle sfere.***

Secondo la visione pitagorica dell'universo, la terra, il Sole, la Luna, i pianeti e le stelle, orbitanti ciascuno all'interno di sfere concentriche, nel loro movimento producevano musica, suonando quella che era definita la "***musica celeste***" della matematica astrale.

"Armonia", infatti, aveva un significato originario di accordo ideale di numeri; in seguito si pensò che tale accordo implicasse una sorta di musica cosmica capace di dare gioia all'anima. L'orecchio umano risulta insensibile a tale armonia perché vi è abituato, ma non così lo spirito interiore dell'uomo che di essa si nutre: cosa che comunemente accade quando si contempla il cielo stellato in una notte serena.

I Pitagorici affermavano la sfericità della Terra e dei corpi celesti: sfericità sostenuta in base all'assoluta predominanza della bellezza della sfera tra i corpi solidi. Al centro dell'universo c'è un fuoco che ordina e plasma la materia circostante, dando origine al mondo. Intorno a questo fuoco si muovono, da occidente ad oriente, dieci corpi celesti: il cielo delle stelle fisse, i cinque pianeti (Saturno, Giove, Marte, Mercurio, Venere), il Sole, la Luna, la Terra e l'anti-Terra, elemento ammesso per completare fino a dieci il numero dei corpi celesti.

Dall'importanza che la scuola pitagorica attribuì ai numeri, relativamente alla spiegazione del mondo fisico e a quello dei suoni, segue l'interesse privilegiato dimostrato dai pitagorici verso questi enti. Pitagora, quindi, elevò il ruolo dell'aritmetica, sottraendola alla sola mansione riguardante unicamente le necessità commerciali e rendendola una scienza pura.

I NUMERI E L'ETICA

In base alla concezione pitagorica, i numeri governavano già la realtà delle figure e dei corpi esistenti ed anche un mondo molto diverso come quello dei suoni: era quindi legittimo pensare che essi governassero tutte le cose.

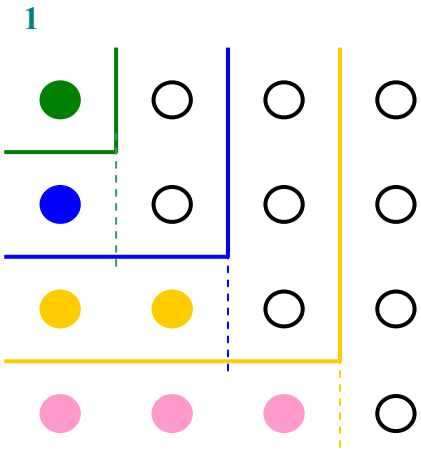
Nell'ottica di individuare nell'universo un ordinamento, i pitagorici elaborarono una filosofia DUALISTICA, nella quale la realtà è spiegata sulla base di una classificazione di opposti. Tra questi si possono individuare 10 coppie fondamentali:

1	**LIMITE – INFINITO**
2	**DISPARI – PARI**
3	**UNITÀ – MOLTEPLICITÀ**
4	**DESTRA – SINISTRA**
5	**MASCHIO – FEMMINA**
6	**QUIETE – MOVIMENTO**
7	**RETTA – CURVA**
8	**LUCE – TENEBRA**
9	**BENE – MALE**
10	**QUADRATO - RETTANGOLO**

La curiosa posizione in cui si trovano da una parte il BENE, la LUCE e i numeri DISPARI, mentre dall'altra sono posti il MALE, la TENEBRA e i numeri PARI, ha probabilmente un suo fondamento in un'altra disposizione geometrica a cui si prestano questi due diversi insiemi numerici.

Volendo sommare in successione tutti i numeri dispari, si può osservare che essi godono di una curiosa e simpatica proprietà:

$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$



cioè, la somma dei primi **n** numeri dispari risulta essere uguale a $\mathbf{n^2}$.

Questa proprietà è stata verificata dai pitagorici in modo geometrico: infatti, rappresentando il numero n = 1 con un punto posto in una certa posizione e sistemando attorno a tale punto il numero 3, quindi tre punti, si deve aggiungere una linea orizzontale di 1 punto e una verticale di n + 1 = 2 punti. Si ottiene così un quadrato di 2 punti di lato e $2^2 = 4$ punti costituenti il quadrato stesso. Proseguendo la costruzione e sommando il numero 5, ossia cinque punti, si aggiunge una linea orizzontale di n=2 punti, e una verticale di n + 1 = 3 punti, ottenendo un quadrato di n + 1 punti di lato, cioè 3, e $3^2 = 9$ punti costituenti il quadrato, che rappresenta la somma dei punti sino a quel momento considerati. La costruzione prosegue poi con lo stesso meccanismo.

Generalizzando risulta che:

se ad un quadrato di n punti per lato, quindi contenente in totale n^2 punti, si aggiunge una riga orizzontale di n punti e una verticale di n + 1 punti, cioè il dispari 2n + 1, si ottiene un quadrato contenente $(n + 1)^2$ punti, ossia:

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Da questo segue che, poiché il generico numero dispari d, di posizione n, è in relazione con la sua stessa posizione attraverso l'espressione d = (2n - 1), si ha:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots\ldots + (2n - 1)}_{\text{n termini con n = 1,2….}} = n^2$$

I numeri dispari formano, quindi, una sequenza infinita di quadrati, figura perfetta; operando invece la stessa costruzione con i numeri pari si otterrebbero dei rettangoli. Questa osservazione suggerisce l'abbinamento del primo tipo di numeri con la perfezione e il secondo tipo con l'imperfezione e il difetto, dal quale scaturiscono le analogie degli accoppiamenti precedenti.

Sempre di Pitagora sono, tra le altre, le classificazioni dei numeri in:

NUMERI AMICI = numeri ognuno dei quali è la somma dei divisori dell'altro;
sono amici, ad esempio, i numeri 220 e 284.
220 ha per divisori 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 e la somma di tali divisori è 284
284 ha per divisori 1, 2, 4, 71, 142 e la somma di tali divisori è 220.
Pitagora, infatti, interrogato sul significato dell'amicizia rispose "Un amico è colui che è l'altro me stesso".

NUMERI PERFETTI = numeri uguali alla somma dei loro divisori;
sono numeri perfetti, ad esempio,
6 = 1 + 2 + 3
28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14

NUMERI LINEARI O RETTILINEI = numeri primi;

NUMERI PIANI O RETTANGOLARI = numeri composti.

NUMERI E NUMEROLOGIA

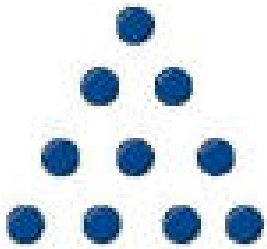
La scuola pitagorica, dedita ad un eccezionale razionalismo, aderì anche a singolari forme di magia. Questo può suscitare meraviglia ma, secondo alcuni studiosi, altro non era che un modo per rinnovare il potere del simbolismo. Il ritorno a riti primitivi e la serie di rigidi e curiosi tabù costituivano un ponte tra il pensiero nuovo e l'antica sacralità.

Dalla corrispondenza tra i numeri, l'ordine cosmico e l'ordine morale, si arriva alle proprietà mistiche degli stessi. Questa tendenza della scuola pitagorica era motivata e quindi esaltata, anche dall'enorme sforzo intellettuale profuso dagli stessi adepti per dissociare i numeri dalle cose e conferire loro un'esistenza astratta.

Ogni forma-numero aveva un significato nascosto di natura mistica, e quelle più armoniose avevano anche carattere sacro:

- il numero **uno** è il generatore dei numeri ed è il numero della ragione;
- il numero **due** è il primo numero pari o femminile, il numero dell'opinione;

- il **tre** è il primo vero numero maschile, il numero dell'armonia, essendo composto di unità, uno, e diversità, due;
- **quattro** è il numero della giustizia e del castigo; esso indica anche l'esattezza del conteggio, ovvero la quadratura dei conti;
- il **cinque**, in quanto somma del primo numero femminile e del primo numero maschile, è il simbolo del matrimonio;
- il **sei** è il numero della creazione e della fecondità del matrimonio, essendo anch'esso legato al primo numero femminile e al primo numero maschile attraverso il prodotto: 6 = 2*3;
- il numero **sette** era il numero della saggezza; strettamente legato al periodo di sette giorni per il decorso delle malattie, era insieme a tre, un numero privilegiato o filosofico; entrambi i numeri dovevano avere un particolare significato all'interno del cosmo;
- il numero **otto** simboleggia il segreto del vero amore; inoltre, poiché 8 = 5 + 3 aggiunge al 5, simbolo del matrimonio, la potenza del maschile 3;
- il numero più sacro in assoluto era il **dieci "perché la decade realizza ogni cosa"**; esso era considerato un numero perfetto, sia perché somma dei primi quattro numeri (10=1+2+3+ 4), sia perché somma dei due numeri filosofici 3 e 7. La **tetraktys**, la figura geometrica da essi costituita in quanto tali numeri, disposti su quattro linee, formano un triangolo equilatero i cui lati sono composti da 4 punti, era considerata figura sacra, sulla quale i pitagorici pronunziavano il giuramento più impegnativo.



PITAGORA E LE CONOSCENZE MATEMATICHE

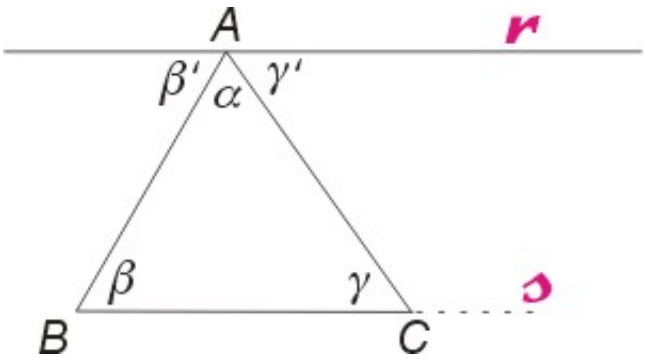
La visione matematica che i pitagorici avevano del mondo, li condusse a sviluppare in modo approfondito lo studio della geometria. Lo studio dei rapporti e delle proporzioni divenne quindi fondamentale per i pitagorici.

La tavola pitagorica

A Pitagora viene attribuita, tra altre conoscenze, anche l'ideazione della TAVOLA PITAGORICA; essa costituisce il più importante approccio al calcolo numerico, anche se in realtà questo metodo di calcolo era già noto da tempo.

La somma degli angoli interni di un triangolo

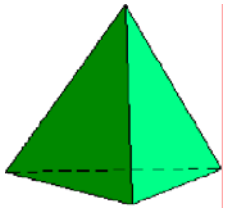
Un contributo dei Pitagorici alla geometria sarebbe la dimostrazione relativa alla somma degli angoli interni di un triangolo; infatti Eudemo attribuisce loro la scoperta del teorema secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto



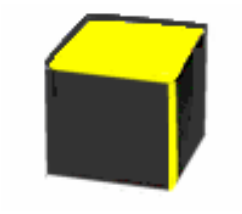
I poliedri regolari

La costruzione del cubo, del tetraedro e dell'ottaedro era probabilmente già nota agli egiziani, ma Proclo attribuisce a Pitagora la costruzione dei poliedri regolari. Non si hanno notizie

sicure che attestino quanto Proclo afferma, anzi, secondo un passo del libro XIII degli Elementi di Euclide, i pitagorici conoscevano solo tre poliedri regolari: il tetraedro, il cubo e il dodecaedro. Sembra plausibile che essi avessero familiarità con quest'ultima figura a seguito del ritrovamento, presso Padova, di un dodecaedro di pietra etrusco risalente a prima del 500 a.C. e dal fatto che, come narra la tradizione, ci fu un contatto diretto fra Pitagora e i sacerdoti etruschi.



il tetraedro (4 facce)



cubo (6 facce)

dodecaedro (12 facce)

Il Teorema di Pitagora

Il famoso "teorema di Pitagora", che il matematico Euclide, vissuto nel III sec. a.C., inserisce con questa definizione nella sua opera *Elementi*, è in realtà anteriore a Pitagora, ma Proclo, citando Eudemo, ne attribuisce chiaramente a Pitagora la paternità. È assodato che tale teorema era conosciuto, solo per alcuni casi particolari, anche dagli egiziani e dai cinesi: il merito di Pitagora fu quello di generalizzarlo e di averne dato una dimostrazione.

Controversa è anche l'attribuzione ai pitagorici della regola per la formazione delle terne pitagoriche, cioè dei gruppi di tre numeri interi e primi tra loro che soddisfano la relazione per cui

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

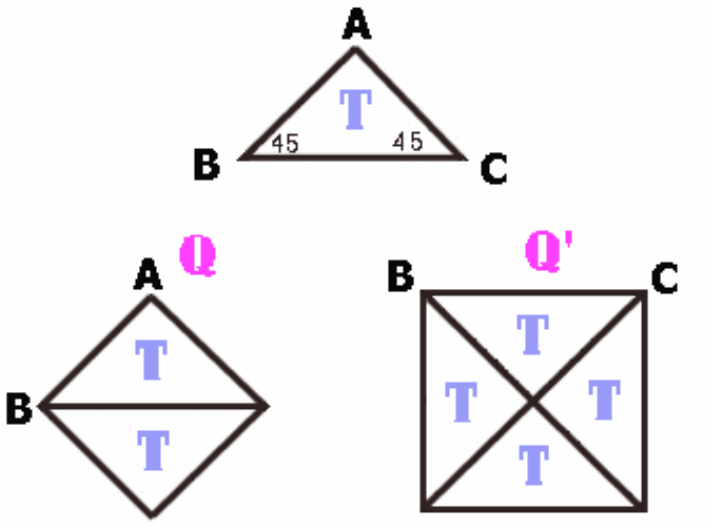
attraverso le formule

$$\frac{m^2-1}{2}, \quad m, \quad \frac{m^2+1}{2}$$

con m numero intero dispari.

Non si sa con sicurezza per quale via i pitagorici dimostrarono il celeberrimo teorema che ha reso immortale il loro maestro anche ai giorni nostri, ma tre sono le ipotesi che trovano i maggiori consensi.

1. Pitagora avrebbe dimostrato tale teorema soltanto in alcuni casi particolari, tra cui quello relativo al triangolo rettangolo isoscele.



Si considera un triangolo rettangolo isoscele T di vertici A, B, C: esso ha l'angolo retto in A, i lati AB = AC, quindi gli angoli adiacenti alla base BC che misurano 45°.

Con tale triangolo si possono costruire due quadrati:

- uno Q di lato AB, ottenuto disponendo due triangoli T in modo che la diagonale del quadrato coincida con la base del triangolo T;
- uno Q' di lato BC, per il quale sono necessari quattro triangoli.

Dalla costruzione si deduce che l'area del quadrato Q' è due volte l'area del quadrato Q, cioè

$$\mathbf{Q' = 2\,Q,}$$

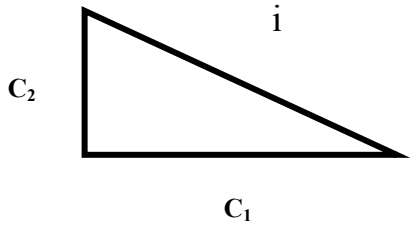
quindi:

$$\mathbf{BC^2 = 2AB^2 = AB^2 + AB^2 = AB^2 + AC^2}$$

Dalle uguaglianze precedenti, leggendo il primo e l'ultimo termine, si ha:

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

2. Secondo altre ipotesi, Pitagora sarebbe arrivato all'importante risultato scomponendo un quadrato di lato $C_1 + C_2$ in due modi.



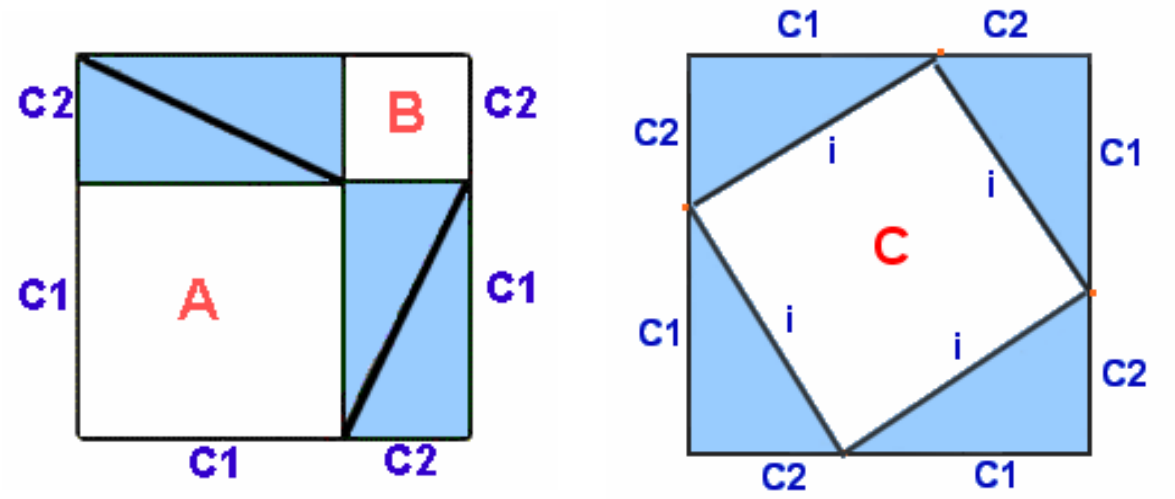
Dato un triangolo rettangolo di cateti C_1 e C_2 e ipotenusa i, si costruiscono due quadrati di lato $C_1 + C_2$.

Nel primo quadrato Q, in corrispondenza degli estremi dei segmenti si tracciano le perpendicolari ai lati d'appartenenza: in tal modo il quadrato risulta diviso in

- due quadrati più piccoli: A, di lato C_1, e B, di lato C_2;
- e due rettangoli, ciascuno formato da due dei triangoli di partenza.

Nel secondo quadrato Q_2 si prendono su ciascun lato, a partire da un vertice, quattro segmenti uguali a C_2. Per differenza, i segmenti rimanenti sono congruenti a C_1.

Q **Q_2**

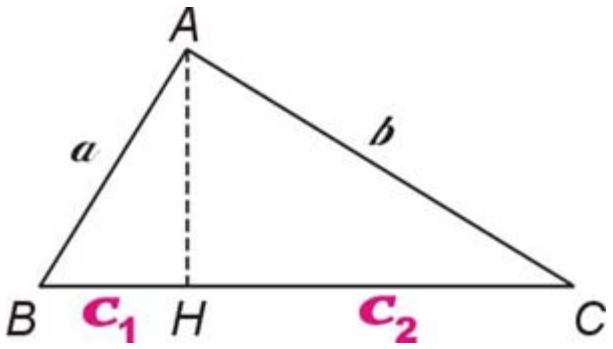


Unendo i punti considerati, il quadrato Q_2 resta diviso in un quadrato C, di lato i, e quattro triangoli congruenti al triangolo di partenza.

I due quadrati Q e Q_2 risultano equivalenti perché entrambi di lato $C_1 + C_2$ e sottraendo da ciascuno di essi i quattro triangoli tra loro equivalenti, perché tutti congruenti, nel primo rimangono

due quadrati i cui lati sono i cateti del triangolo di partenza; nel secondo rimane il quadrato C il cui lato è l'ipotenusa. Poiché sottraendo da figure equivalenti parti equivalenti ciò che rimane è ancora equivalente, risulta che il quadrato C, che ha per lato l'ipotenusa, è equivalente alla somma dei due quadrati A e B che hanno per lati i cateti del triangolo rettangolo iniziale.

3. Se, come dice Proclo, Pitagora conosceva le proporzioni e la similitudine, è possibile che egli abbia dimostrato il teorema nel seguente modo: dato un triangolo ABC, rettangolo in A, sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa BC.



Posto:

$$a = AB, \quad b = AC, \quad c = BC, \quad c_1 = BH, \quad c_2 = HC$$

ovviamente $c = c_1 + c_2$.

Il triangolo AHB è simile al triangolo ABC, perché entrambi rettangoli e con l'angolo di vertice B in comune. Pertanto:

$$a/c_1 = c/a$$

cioè:

$$a : c_1 = c : a.$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni,

$$a^2 = c_1.c \quad \text{(relazione nota come I teorema di Euclide).}$$

Allo stesso modo, il triangolo AHC è simile al triangolo ABC e si ha:

$$b/c_2 = c/b$$

cioè:

$$b : c_2 = c : b$$

quindi, sempre per la proprietà fondamentale delle proporzioni,

$$b^2 = c_2\, c$$

Considerando ora le due relazioni

$a^2 = c_1\, c$

e

$b^2 = c_2\, c$

e sommandole membro a membro, si ha:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c_1\, c + c_2\, c = c\,(c_1 + c_2) = c.c = c^2}$$

Leggendo, quindi, il primo e l'ultimo termine dell'uguaglianza, si ottiene:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

La teoria delle proporzioni

Poiché i rapporti erano la chiave per la comprensione della natura, i matematici greci s'impegnarono per investigarne tutte le proprietà e i pitagorici giunsero a suddividere tali rapporti in dieci categorie.

Se b è la media tra due numeri ***a*** e ***c*** con ***a < c***, allora le tre quantità sono correlate tra loro secondo una delle seguenti dieci equazioni:

$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a} \qquad \frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{b}$$
$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b} \qquad \frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{a}$$
$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c} \qquad \frac{c-a}{c-b}=\frac{c}{a}$$
$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a} \qquad \frac{c-a}{b-a}=\frac{b}{a}$$
$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a} \qquad \frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}$$

Nicomaco da Gerasa riferisce che Pitagora conosceva la media aritmetica, data dalla prima delle relazioni precedenti, la media geometrica data dalla seconda relazione e la media armonica, detta originariamente "***subcontraria***", data dalla terza relazione. Il confronto si può fare o per differenza o per quoziente.

Proporzione aritmetica

Tre numeri *a*, *b*, *c* sono in proporzione aritmetica se differiscono l'uno dall'altro della medesima quantità, cioè quando

$$b - a = c - b$$

Da cui:

$$\frac{b-a}{c-b}=1$$
$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a}$$

$$(b - a) : (c - b) = a : a$$

Proporzione geometrica

Tre numeri *a*, *b*, *c* sono, invece, in proporzione geometrica se il rapporto tra ogni numero e il successivo è costante cioè se

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$a : b = b : c$$

da cui si ricava, applicando la proprietà dell'invertire:

$$b : a = c : b$$

Applicando la proprietà dello scomporre, risulta:

$$(b - a) : a = (c - b) : b$$

Con la proprietà del permutare, si ha

$$(b - a) : (c - b) = a : b$$

da cui appunto:

$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}$$

Proporzione armonica

Tre numeri sono in proporzione armonica se i loro inversi sono in proporzione aritmetica:

$$1/a - 1/b = 1/b - 1/c$$

Da questa relazione si ha:

$$\frac{b-a}{ab}=\frac{c-b}{bc}$$

$$\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{c}$$

$$(b - a) : a = (c - b) : c$$

Applicando la proprietà del permutare, si ha:

$$(b - a) : (c - b) = a : c$$

da cui, appunto:

$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c}$$

È assai verosimile che i pitagorici conoscessero le proprietà delle proporzioni solo per numeri interi. Essi avevano cognizione, però, anche della media nota come **"proporzione aurea"**, che stabilisce una relazione tra due di queste medie**: il primo di due numeri sta alla loro media aritmetica come la loro media armonica sta al secondo di essi.**

Cioè, dati due numeri ***a*** e ***c***

- la loro media aritmetica ***b*** è, come si è visto,

  $$b - a = c - b$$

  da cui:

  $$b + b = a + c$$
  $$2b = a + c$$
  $$b = (a + c)/2$$

- la loro media armonica ***d*** è,

  $$\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$$

  $$\frac{d-a}{ad}=\frac{c-d}{cd}$$

  $$\frac{d-a}{a}=\frac{c-d}{c}$$

  $$c(d - a) = a\,(c - d)$$
  $$cd - ca = ca - ad$$
  $$cd + ad = ca + ca$$
  $$d(c + a) = 2ca$$
  $$d=\frac{2ac}{a+c}$$

per cui, la proporzione aurea risulta essere:

$$a:\frac{a+c}{2}=\frac{2ac}{a+c}:c$$

La sezione aurea

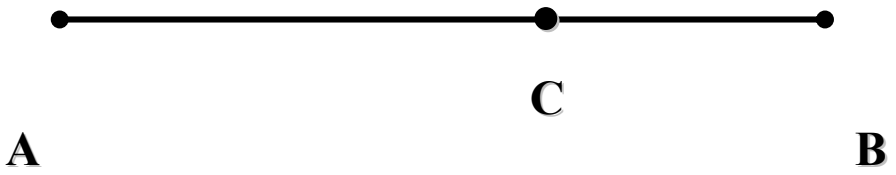
Per ciò che riguarda il rapporto aureo, i pitagorici studiarono approfonditamente le proprietà del rapporto che divide un segmento in due parti in modo tale che il rapporto tra la parte minore e la maggiore è uguale al rapporto tra la maggiore e l'intero segmento.

Per Pitagora il "medio aureo" era re tra i numeri, privilegiato dalla natura e dagli uomini, testimone inconfutabile del legame tra musica, bellezza, natura e matematica.

Keplero (XVI – XVII secolo), relativamente alla proporzione divina, dichiarava che:

"la geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora, l'altro è la divisione di un segmento in estrema e media ragione; il primo può essere paragonato ad un sacco di oro, il secondo ad un gioiello prezioso".

"Si dice che un segmento risulta diviso in estrema e media ragione quando tutto il segmento sta alla parte maggiore di esso come la parte maggiore sta a quella minore".



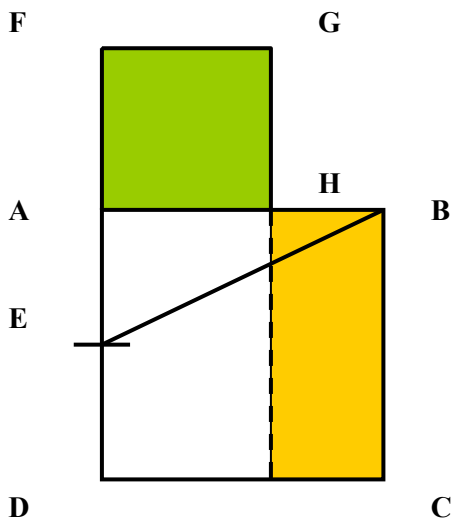
Facendo riferimento al segmento AB, l'enunciato significa che bisogna determinare il segmento **AC** che sia medio proporzionale tra l'intero segmento **AB** e il segmento **CB**, ovvero tale che

AB : AC = AC : CB

I Pitagorici, per la costruzione di tale segmento, utilizzarono probabilmente un procedimento geometrico simile a quello presentato da Euclide nei suoi *Elementi*: Libro II, Proposizione 11 e Libro VI, proposizione 30.

In base a quanto scritto da Euclide, preso un segmento AB

- si costruisce il quadrato di lato AB;
- sul lato AD del quadrato si individua il punto medio E.
- Si unisce B con E,
- si prolunga il lato DA, dalla parte di A, di un segmento FA in modo che risulti EF = EB;



- Completato il quadrato AFGH, H rappresenta il punto considerato, cioè il punto che divide il segmento AB secondo la sua sezione aurea.

In questa costruzione risulta che la somma del rettangolo di dimensioni DF e FA con il quadrato di lato AE è equivalente al quadrato di lato FE;

cioè

$$DF \cdot FA + AE^2 = FE^2$$

Infatti

FE = FA + AE

Quindi

$FE^2 = (FA + AE)^2$, cioè

$$FE^2 = FA^2 + AE^2 + 2FA \cdot AE$$

(relazione nota ai geometri ellenici ma espressa geometricamente).
Poiché l'ultimo termine può essere scritto come 2AE·FA, e 2AE = AD, l'uguaglianza precedente diventa:

$$\mathbf{FE^2 = FA^2 + AE^2 + AD \cdot FA.}$$

D'altra parte, osservando la figura, il rettangolo

$$\mathbf{DF \cdot FA = FA^2 + DA \cdot FA}$$

Sostituendo tali scritture nella prima uguaglianza scritta, si ha che tale uguaglianza è effettivamente verificata, infatti:

$$FA^2 + AD \cdot FA + AE^2 = FA^2 + AE^2 + AD \cdot FA.$$

Avendo verificato la validità di tal scrittura e ripartendo da questa:

$$\mathbf{DF \cdot FA + AE^2 = FE^2}$$

si ha:
FE = EB per costruzione, quindi sostituendo nel secondo membro dell'uguaglianza risulta:

$$DF \cdot FA + AE^2 = EB^2$$

Per il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AEB risulta
$\mathbf{EB^2 = AB^2 + AE^2.}$
Quindi sostituendo si ha:

$$\mathbf{DF \cdot FA + AE^2 = AB^2 + AE^2.}$$

Sottraendo da ambo i membri il termine comune AE^2, si ottiene:

$$DF \cdot FA = AB^2$$

Da tale relazione risulta che il rettangolo di dimensioni FD e FA è equivalente al quadrato di lato AB. Queste figure, però, risultano composte da due parti:

- il rettangolo DF·FA è somma del qudrato di lato FA e del rettangolo di dimensioni AD ed AH;
- il quadrato di lato AB è somma del rettangolo di lato BC e HB e del rettangolo di lati AD e AH.

Togliendo da entrambe le figure il rettangolo comune AD·AH, poiché sottraendo da figure equivalento parti equivalenti ciò che resta è ancora equivalente, si ha:

$$FA^2 = BC \cdot HB$$

Ma FA = AH e BC = AB, quindi

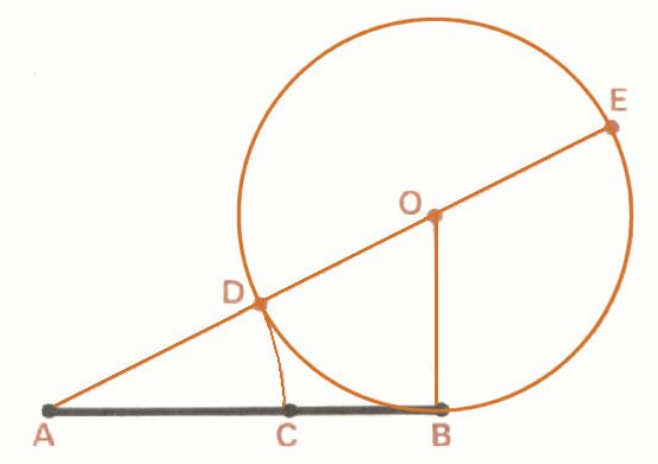
$$AH^2 = AB \cdot HB$$

Scrivendo tale relazione sotto forma di proporzione si ha proprio

$$\mathbf{AB : AH = AH : HB}$$

La costruzione geometrica che porta all'individuazione della sezione aurea è anche la seguente.
Sia *AB* il segmento dato; da *B* si tracci il segmento *BO* perpendicolare ad *AB* ed uguale alla metà di *AB* stesso e si descriva la circonferenza di centro *O* e raggio *OB*.
Condotta la semiretta *AO*, siano *D ed E* le sue intersezioni con la circonferenza.
Si riporti il segmento *AD* su *AB*.
Il punto C divide il segmento dato *AB* nelle parti richieste.

Infatti, poiché la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna si ha:



AE : AB = AB : AD.

Applicando poi la regola dello scomporre si trova:

(AE - AB) : AB = (AB - AD): AD.

Poiché la circonferenza ha raggio pari alla metà di AB, risulta che AB = DE, per cui nel primo membro della proporzione si ha

***AE - AB = AE - DE = AD = AC*;**

inoltre, nel secondo membro è

AB* - AD = *AB - AC = CB,

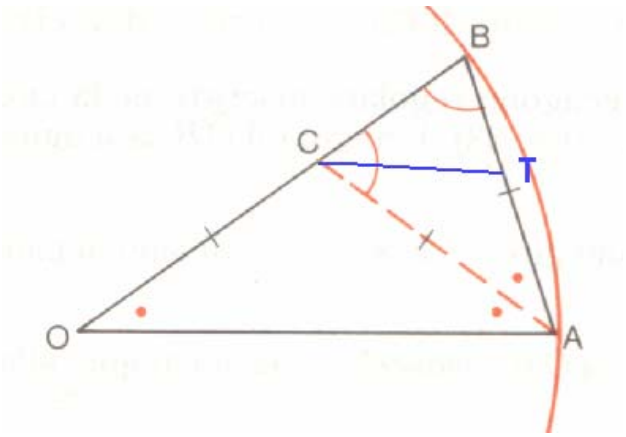
per cui, sostituendo, si ha:

AC : AB = CB : AC,

e per la proprietà dell'invertire

AB : AC = AC : CB.

Alla sezione aurea sono collegate alcune figure geometriche particolari che prendono il nome di ***figure sublimi***, figure trattate nel libro VI, proposizione 30, degli *Elementi* di Euclide.



Una di queste figure è il **triangolo sublime**: un triangolo isoscele in cui l'angolo alla base, che misura 72°, è doppio dell'angolo al vertice di 36°: in questo triangolo la base è la parte aurea del lato.

Questa figura ha un'ulteriore particolarità semplice da verificare:
Considerato il triangolo sublime AOB

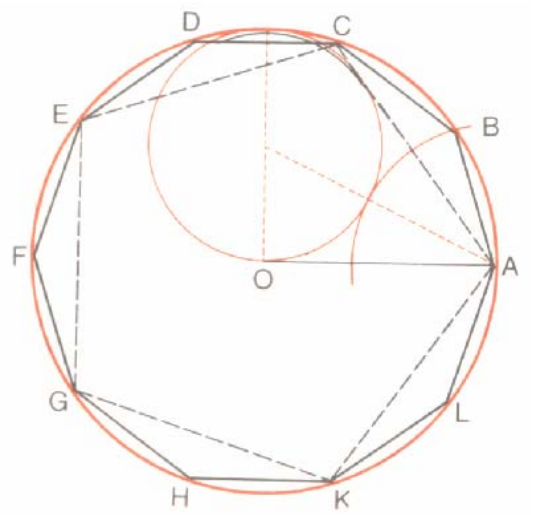
- Se dal vertice A si traccia la bisettrice dell'angolo, questo viene diviso in due angoli ciascuno dei quali misura 36°, quindi il triangolo BAC, avendo un angolo di 72° in B e uno di 36°, ha l'angolo in C che misura 72°;
- esso è quindi nuovamente un triangolo isoscele sublime in cui la base BC è la parte aurea dei lati obliqui AB e AC; non solo, ma poiché ciascuno di essi è congruente a CO, perché il triangolo COA è ancora isoscele, in quanto l'angolo in O e la metà dell'angolo in A misurano 36°, risulta che CB è la sezione aurea anche di OC.
- Analogamente, se si traccia la bisettrice dell'angolo in C, si ottiene il triangolo sublime CBT in cui la base BT è la sezione aurea dei lati obliqui CB e CT, come pure del segmento TA.

Concludendo, da questa costruzione si ricava:

- da una parte la proprietà del triangolo sublime di **autorigenerarsi**,
- dall'altra si può osservare che se OC è la sezione aurea di *OB*, *CB* è, a sua volta, la sezione aurea di *OC* e così di seguito per gli altri segmenti precedentemente nominati.

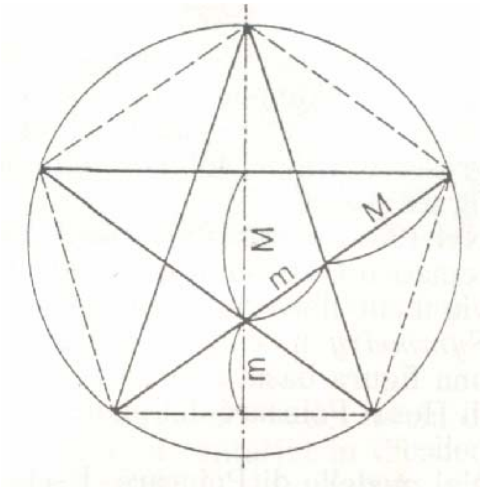
Si può quindi affermare che:

se un segmento si divide in media ed estrema ragione, la parte minore è, a sua volta, la sezione aurea di quella maggiore.



Altre due figure strettamente legate alla sezione aurea sono il pentagono e il decagono. Il decagono regolare ha per lato la sezione aurea del raggio della circonferenza ad esso circoscritta. Il pentagono regolare inscritto si ottiene congiungendo alternativamente i vertici del decagono regolare inscritto.

Inoltre, se all'interno del pentagono si tracciano due diagonali che partono dallo stesso vertice, queste, unitamente al lato del pentagono, formano un triangolo isoscele sublime: il lato del pentagono regolare risulta quindi essere la sezione aurea di una sua diagonale. Il punto di intersezione tra due diagonali qualsiasi, poi, le divide in due segmenti che stanno tra loro secondo rapporto aureo.

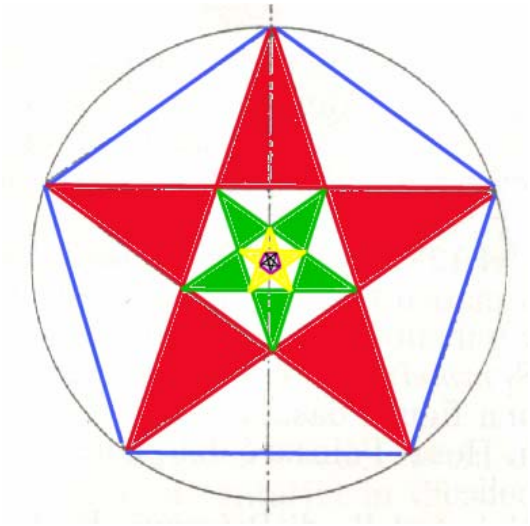


I triangoli isosceli che si formano all'interno di un pentagono, tracciando tutte le sue diagonali, danno origine ad una stella a cinque punte, simbolo del rapporto armonioso consentito dalla sezione aurea e noto in alcune società mistiche con il nome di "Stella Fiammeggiante".

Questo simbolo,oltre che presso la scuola pitagorica, è presente nella religione indù e in quella ebraica; era il sigillo di Salomone (Pentaculum Salomonis) e si trovava anche nelle decorazioni dei Templari. Nella Germania medioevale essa era conosciuta come "Drüdenfuss" (piede di strega) e aveva fama di possedere misteriosi poteri diabolici.

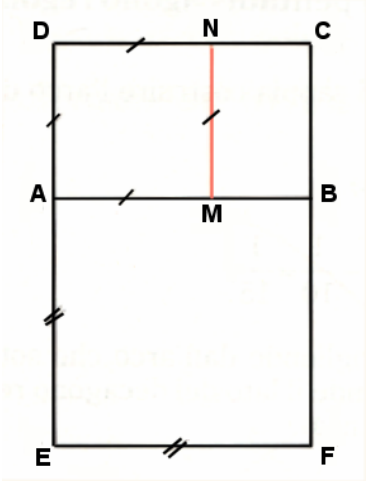
Al centro della stella si può notare un altro pentagono

regolare, nel quale si possono tracciare nuovamente le diagonali e ripetere la figura della stella.



All'interno della nuova stella è visibile un nuovo pentagono regolare del quale si possono tracciare le diagonali ed avere un'altra stella a cinque punte e così via.

Ultima figura geometrica legata alla sezione aurea è il rettangolo aureo, cioè un rettangolo che ha per dimensioni un segmento dato e la sua sezione aurea. Se, all'interno di un rettangolo aureo *DCFE*, si disegna un quadrato *ABFE* che ha il lato uguale al lato minore del rettangolo, si ottiene un rettangolo differenza, *ABCD,* che a sua volta è un rettangolo aureo. In sostanza, come si è gia visto per il triangolo isoscele sublime e per il pentagono, anche questa figura ha la proprietà di autorigenerarsi.



Per comprendere l'importanza della sezione aurea nell'antichità è bene considerare che per i Greci e per i Romani la simmetria non era l'identità assoluta fra due grandezze, situate da parti opposte rispetto ad un punto o ad un asse. Per gli antichi il concetto di simmetria aveva il significato di EURITMIA, ossia una distribuzione armonica, una commensurabilità, delle varie parti. Le due grandezze non erano uguali, ma misurate in multipli di una comune unità, che era un rapporto dato.

In molte sculture greche si trova il rapporto aureo, come ad esempio nel Doriforo di Policleto, infatti lo scultore affermava che, nell'uomo perfetto, la lunghezza complessiva del corpo viene divisa dalla linea dei fianchi secondo la sezione aurea.

Si ritrova la sezione aurea nell'arco di Costantino a Roma e in molti edifici del Rinascimento, come ad esempio nella Certosa di Pavia.

Nel corso della storia dell'arte il numero aureo fa spesso capolino nelle opere degli autori più diversi e in tempi molto distanti tra loro. Ne sono un esempio le immagini seguenti:

Figura 5 I sindaci della gilda dei sarti - Rembrandt. La testa del personaggio principale divide il quadro in altezza e in larghezza in base al rapporto aureo.

Figura 6 Parade de cinque - Gorge Seurat. La linea orizzontale è interrotta da quella verticale secondo proporzioni auree.

Figura 7 La Vergine delle rocce – Leonardo - National Gallery - Londra. Il numero aureo si trova nel rapporto tra le dimensioni del quadro.

Figura 8 La Trasfigurazione - Raffaello Sanzio. Il rapporto aureo si trova sia nella linea passante per la sommità del monte, che divide idealmente il quadro nel rapporto aureo, sia nell'immagine del Cristo, tra l'altezza della figura e la distanza tra le mani delle braccia aperte.

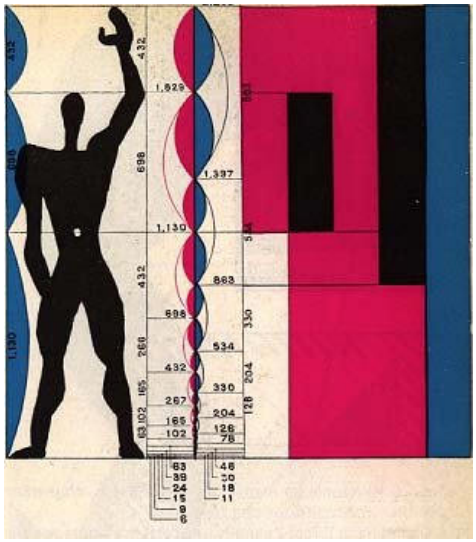


Figura 9 Il Modulor - Charles - Edouard Jeanneret. Titolo derivato da *module,* unità di misura e *section d'or,* sezione aurea. Il *Modulor* è una scala dimensionale basata sulle proporzioni auree.

Figura 5 La Leda atomica - Salvador Dalì. La posizione in cui è tracciata la linea azzurra orizzontale divide l'intera altezza del quadro secondo il rapporto aureo di 1,61.

I numeri irrazionali

Il fatto che i numeri fossero il fondamento dell'intero universo divenne un pilastro della concezione filosofica di tutto l'occidente. Ben presto, però, comparve all'orizzonte una minaccia che avrebbe messo in crisi la visione pitagorica del mondo e compromesso l'esistenza stessa della scuola. Una rivelazione che i pitagorici tentarono di tenere segreta: la scoperta dell'irrazionalità.

I pitagorici credevano che i corpi fossero costituiti di corpuscoli tutti uguali tra loro e disposti in forme geometriche. Questa convinzione, in ambito geometrico, portava a ritenere che anche il punto avesse un'estensione, sia pure piccolissima. Da ciò essi deducevano che un segmento dovesse essere formato da un numero finito di punti: pertanto il rapporto di due segmenti doveva risultare uguale al rapporto di numeri interi che esprimevano quante volte il punto era contenuto in ciascuno di essi. In altre parole, i pitagorici pensavano che il punto fosse il sottomultiplo comune a tutti i segmenti e che tutti i segmenti fossero tra loro commensurabili.

Per la matematica greca, poi, contare e misurare erano due sinonimi, ossia avere un numero significava poter tracciare una linea con una lunghezza ad esso corrispondente. In questa ottica, il rapporto tra due numeri corrispondeva a confrontare le lunghezze di due segmenti. Tale confronto era eseguito attraverso un'unità campione, detta ***unità di misura***, la quale doveva essere contenuta un certo numero di volte in un segmento e un altro numero di volte nel secondo segmento: questo per qualunque cosa esistente.

Applicando, però, il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele i pitagorici furono costretti ad ammettere l'esistenza di grandezze che non obbedivano a tale legge.

Aristotele riporta quella che probabilmente fu la dimostrazione dei pitagorici riguardante l'incommensurabilità della diagonale di un quadrato rispetto al lato del quadrato stesso:

cioè la dimostrazione della irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Essa consiste nel dimostrare assurda l'ipotesi della commensurabilità. Supponendo che $\sqrt{2}$ sia uguale al rapporto di due interi m e n primi fra loro, si ha:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

da cui segue, elevando al quadrato entrambi i membri,

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2$$

Ciò implica che m è multiplo di 2, perché altrimenti $m^2 = m \cdot m$ non sarebbe divisibile per 2, quindi deve essere m pari e cioè si deve poter scrivere: $m = 2p$.

Ne deriva, sostituendo, l'uguaglianza:

$$2n^2 = (2p)^2$$
$$2n^2 = 4\,p^2$$

o anche:

$$n^2 = 2\,p^2$$

Per lo stesso motivo anche n deve essere multiplo di 2 e ciò è assurdo poiché, per ipotesi, si è supposto che m e n non avessero alcun fattore comune.

La conclusione di questo ragionamento è che il rapporto tra il lato di un quadrato e la sua diagonale non è esprimibile tramite una "ratio" ma è data da un numero IRRAZIONALE!

Non si sa come gli antichi considerassero le quantità irrazionali.

Sono **razionali** tutti i numeri ottenibili come rapporto tra due numeri interi, il secondo dei quali diverso da zero. Ogni numero razionale si può esprimere mediante una frazione.

Sono razionali, oltre agli interi, i **numeri decimali finiti** e i **numeri decimali periodici**: **semplici**, cioè quelli per cui il periodo inizia subito dopo la virgola, e **misti**, cioè quelli per i quali, dopo la virgola e prima del periodo, sono presenti una o più cifre che non si ripetono, dette antiperiodo.

L'Universo, però, dimostrò di avere ben poche intenzioni di soddisfare le esigenze della matematica greca e mise subito in evidenza il fatto che non tutte le grandezze sono esprimibili attraverso una semplice e rassicurante frazione formata da numeri naturali *a/b*, con *b* rigorosamente diverso da 0, ente che i matematici greci rifiutavano sdegnosamente come numero perché ad esso non poteva corrispondere alcuna forma.

Il quadrato stesso, onorato dai pitagorici in quanto espressione della perfezione grazie alle sue proprietà e perché i suoi quattro lati rappresentavano i quattro elementi costitutivi della materia, aria, acqua, fuoco e terra, conteneva in sé il germe dell'irrazionalità. Il rapporto tra il lato del quadrato e la sua diagonale, infatti, non è rappresentato da due numeri naturali. Geometricamente, cioè, non è possibile trovare un segmento, per quanto piccolo, che sia contenuto un numero intero di volte nel lato e un altro numero intero di volte nella diagonale dello stesso quadrato: le due grandezze risultano quindi "***incommensurabili***".

Questa scoperta scosse alla base i fondamenti su cui si basavano le teorie dei pitagorici, e la crisi raggiunse l'apice quando essi si accorsero che anche il numero aureo, eletto a rappresentanza della loro scuola, era un irrazionale.

Il calcolo della Sezione Aurea

Volendo ricavare il valore del rapporto aureo, si considera un segmento di estremi A e B e un punto S su di esso.

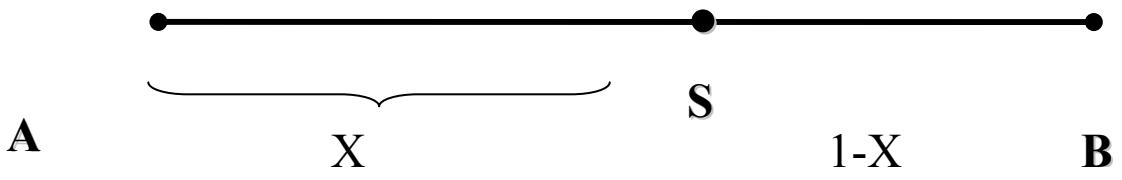
Come si è detto, la sezione aurea è la parte **AS** del segmento **AB** media proporzionale fra l'intero segmento e la parte restante **SB**.

Il segmento **AS** soddisfa la proporzione

$$AB : AS = AS : SB$$

Se si assume **AB** come unità di misura, ossia **AB** = 1 metro, e si denota con x la misura della parte maggiore **AS**, ne segue che la parte minore **SB** = 1 – x. Si ha quindi che:

$$1 : x = x : (1 - x)$$



Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$X^2 = 1 \cdot (1 - X)$$

quindi,

$$X^2 = 1 - X$$

$$X^2 + X - 1 = 0$$

Equazione di secondo grado, le cui soluzioni sono:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Tra queste, la seconda, corrispondente ad un numero negativo, va scartata.

Il valore del segmento aureo è, quindi, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Il Rapporto Aureo

Con riferimento al segmento precedente, si definisce **Rapporto Aureo** il rapporto:

AB/AS con **AS** Sezione Aurea di **AB**.

Esso viene ottenuto dal reciproco del numero aureo razionalizzato ed è indicato con la lettera greca Φ.

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,618033988$$

Il numero Φ è irrazionale, cioè un numero decimale illimitato e aperiodico, di cui, nella precedente scrittura, sono indicati solo una parte di decimali.

Per impedire che tali scoperte fossero divulgate, la confraternita le occultò e costrinse ogni adepto a non rivelarne l'esistenza, pena la morte! La presenza degli irrazionali, però, era difficile da nascondere, soprattutto ad un popolo maniaco della geometria e delle costruzioni. I numeri irrazionali, infatti, si celano ovunque: nel quadrato, nel numero aureo, nel rapporto tra il lato di un triangolo equilatero e la sua altezza, tra la lunghezza di una circonferenza e il proprio diametro.

La divulgazione dell'esistenza di tali incresciosi enti era inevitabile e ad essa contribuì Ippaso di Metaponto, matematico membro della scuola pitagorica che, secondo la leggenda, fu probabilmente il primo a scoprirla e venne condannato a morte per annegamento.

In realtà, sembra che Ippaso avesse altri motivi di dissenso nei confronti della setta, in relazione alla sua preferenza per la fede tradizionale rispetto a quella sostenuta dai pitagorici.

Le idee della scuola pitagorica, comunque, sopravvissero agli irrazionali anche dopo lo scioglimento della setta e dopo la morte di Pitagora.

I suoi seguaci si organizzarono in varie comunità e proseguirono l'opera del maestro. Le più importanti furono quella di Filolao di Tebe, vissuto nella seconda metà del V secolo a.C., e di Archita di Taranto, vissuto all'inizio del IV secolo a.C.

La revisione della filosofia pitagorica che seguì la scoperta degli incommensurabili portò, tra le sue conseguenze, alla concezione di una geometria veramente razionale, indipendente dai numeri, i cui enti sono concepiti come idee, al di là di qualsiasi legame con realtà fisiche. Da allora, infatti, per i matematici greci, l'unica strada percorribile per proseguire con i loro studi geometrici fu quella di considerare in matematica due tipi di enti differenti: i numeri e le grandezze. Essi portarono avanti le loro analisi sulle figure geometriche utilizzando una sofisticata teoria sulle proporzioni tra grandezze sviluppata da Eudosso di Cnido, vissuto tra il 408 e il 355 a.C..Egli fu uno dei più grandi matematici del mondo antico, la cui teoria venne inserita da Euclide nel V libro degli Elementi.

I fondamenti di tale ideologia, inoltre, influenzarono per secoli la filosofia occidentale arrivando sino ad Aristotele (384-322 a. C.). Egli, nella sua opera la *Metafisica,* fornisce una sintesi del pensiero pitagorico relativo ai numeri:

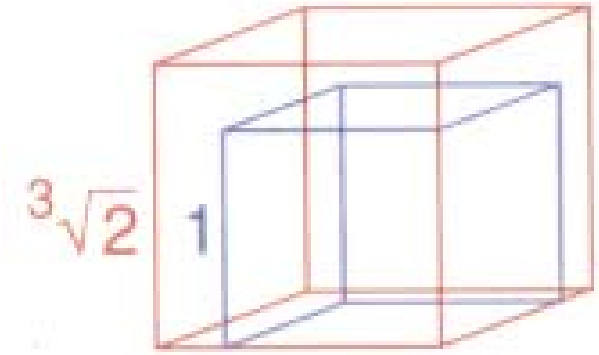
"Tra i principi matematici, i numeri sono i primi per natura, e i pitagorici credettero di vedere nei numeri, più che nel fuoco, nella terra e nell'acqua, molte somiglianze con le cose che sono e divengono, sicché una proprietà dei numeri sarebbe la giustizia, un'altra l'anima e l'intelletto,

un'altra ancora l'occasione e così via, si può dire, per ciascuna delle altre cose. Inoltre nei numeri essi videro anche esprimersi le proprietà delle diverse specie d'armonia e i rapporti che le costituiscono. Infine tutte le altre cose apparivano modellate sui numeri in tutta la loro natura, e i numeri da parte loro sembravano come i termini assolutamente primi di tutta la natura. Per queste ragioni essi credettero che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutti gli esseri, e che tutto l'universo fosse armonia e numeri."

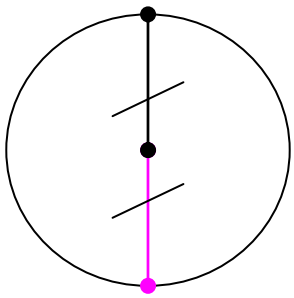
LA DUPLICAZIONE DEL CUBO

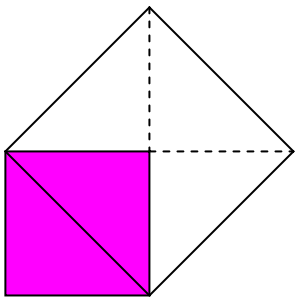
Legato alla questione dell'irrazionalità è uno dei più famosi problemi della geometria antica, noto come il problema della "**DUPLICAZIONE DEL CUBO**".

Secondo la leggenda, narrata da Erodoto, durante una grave pestilenza che colpì la città di Atene, un gruppo di anziani si recò presso l'oracolo di Delo per interpellare il dio Apollo affinché ponesse fine al flagello. Il responso dell'oracolo fu che il dio avrebbe posto fine alle loro sofferenze se i cittadini ateniesi gli avessero costruito un altare di forma cubica, come quello già esistente, ma di volume doppio. I geci pensarono che, dopotutto, il prezzo da pagare per porre termine ai loro guai non fosse poi troppo alto, né il compito troppo arduo. Si affrettarono, quindi, a costruire un nuovo altare cubico con il lato di base doppio di quello precedente. Con grande sgomento, quando porsero al dio il loro dono, si accorsero che la pestilenza non cessò e questo perché raddoppiando il lato del cubo NON ne avevano raddoppiato il volume.



I Greci non riuscirono a rendersi immediatamente conto dell'errore, perché essi erano perfettamente in grado di duplicare un segmento o un quadrato: per duplicare il primo bastava tracciare il cerchio che avesse il segmento iniziale come raggio; per duplicare un quadrato bastava costruirne uno sulla diagonale del di partenza.





La strada, però, non era altrettanto semplice per il cubo.
Infatti, supponendo di avere un cubo di lato unitario, quindi L = 1,
il volume di tale cubo risulta

$$V = L^3 = 1^3 = 1$$

Se il volume di tale cubo deve raddoppiare, e quindi essere 2V, occorre determinare l'opportuna misura del lato, che si ottiene utilizzando la formula inversa:

$$2V = L^3$$

Con $V = 1$ risulta

$$2 = L^3$$
$$\sqrt[3]{2} = L$$

Il numero $\sqrt[3]{2}$ era un numero irrazionale.

Occorre attendere le nuove spinte culturali del Rinascimento perché i matematici ricominciassero ad utilizzare i numeri tipo $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2}$ ecc.

Le prime teorie rigorose sui numeri irrazionali si svilupparono solo nella seconda metà dell'Ottocento. Le più famose sono quelle elaborate dai matematici tedeschi Georg Cantor (1845 - 1918) e Richard Dedekind (1831 – 1916).

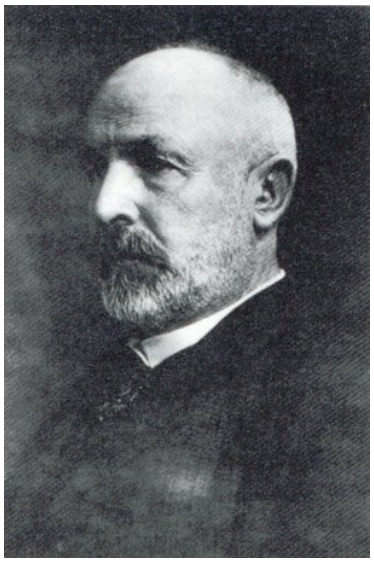


Figura 6 Georg Cantor

La teoria di Cantor è basata sull'idea che ogni numero irrazionale si possa approssimare quanto si vuole per mezzo di una sequenza di numeri razionali. Se si vuole approssimare $\sqrt{2}$ si può considerare la successione di valori:

1, 1.4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421,...

in cui ogni termine si avvicina a $\sqrt{2}$ più del precedente. La conoscenza di questa sequenza è in fondo sufficiente a dare tutte le informazioni necessarie su $\sqrt{2}$. Cantor mostrò in che modo quelle successioni di approssimazioni potessero essere sommate, sottratte, moltiplicate ecc. come se fossero numeri: egli definì quindi un numero irrazionale come una successione di approssimazioni razionali.

La teoria di Dedekind è basata in fondo sulla stessa idea. Egli osservò che un irrazionale, quale $\sqrt{2}$, divide i numeri razionali in due classi: quelli che ne sono maggiori e quelli che ne sono minori. I primi sono *approssimazioni per difetto,* i secondi *per eccesso.* I numeri irrazionali possono dunque essere definiti per mezzo di partizioni dei razionali.

Approssimazioni per difetto	$\sqrt{2}$	Approssimazioni per eccesso
1	$\sqrt{2}$	2
1,4	$\sqrt{2}$	1,5
1,41	$\sqrt{2}$	1,42
1,414	$\sqrt{2}$	1,415
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143
1,41421	$\sqrt{2}$	1,41422
…….	$\sqrt{2}$	…….

É da notare che i numeri irrazionali sono caratterizzati dal fatto di avere un'espressione decimale infinita non periodica: dunque la loro costruzione deve sempre essere basata su processi infiniti.

UN ALTRO PROBLEMA CLASSICO:
la Quadratura del Cerchio

Il problema della quadratura del cerchio, è un problema che consiste nel ricercare un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio. In altre parole, posto che il cerchio abbia raggio pari all'unità, la sua area è

$$A = \pi r^2$$

e con

$$r = 1$$

tale area risulta

$$A = \pi.$$

Ricercare un quadrato equivalente a questo cerchio significa che anch'esso deve avere area π, quindi:

$$A = \pi$$
$$l^2 = \pi$$
$$l = \sqrt{\pi}$$

Se il lato del quadrato deve avere una lunghezza pari alla quantità precedente, il problema si traduce nel sapere se il numero π abbia caratteristiche tali affinché la sua radice sia determinabile con riga e compasso.

Un altro celebre problema collegato al valore di π riguarda la rettificazione della circonferenza, che consiste nel tracciare un segmento di lunghezza uguale ad una circonferenza data. Se tale circonferenza ha raggio unitario, risulta:

$$C = 2\,\pi\, r = 2\,\pi;$$

il problema consiste, allora, nel costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza 2π.

Interessante può essere vedere come questo importante numero sia entrato a far parte della cultura matematica degli antichi popoli, e come l'attenzione che esso ha suscitato nelle migliori menti matematiche delle più diverse culture abbia portato a sviluppi e conquiste inattese.

π nella storia

Tutte le culture antiche si sono confrontate con l'onnipresente π: per sapere quale lunghezza dovesse avere una corda per circondare il tronco di un grosso albero; per conoscere il numero di assi necessari a costruire una cisterna di forma circolare; per sapere la misura di una lista di ferro che doveva rinforzare le ruote di un carro.

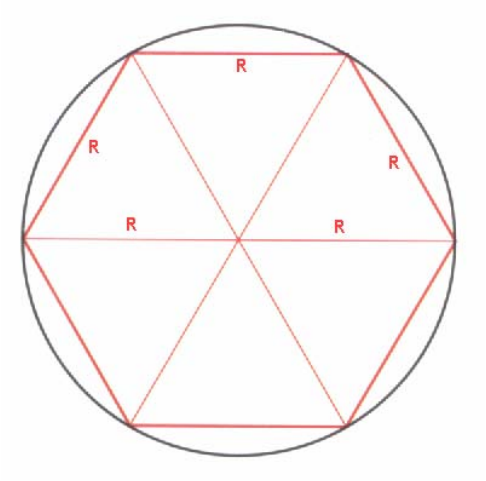
Dal punto di vista storico, però, è necessario osservare subito che non è possibile formulare concetti relativi al fatto che per gli antichi popoli il valore di π corrispondesse ad un certo numero. Questo per diversi motivi:

1. le antiche culture utilizzavano, per i loro calcoli, formule in cui il simbolo e il valore π non comparivano affatto. Questo, sia perché essi non ne sapevano il significato, sia perché non conoscevano i numeri decimali come sono intesi oggi;
2. i matematici più antichi non sempre si resero conto che il rapporto esistente tra una circonferenza e il suo diametro, $c/2r = \pi$, era lo stesso che intercorre tra l'area del cerchio e il quadrato del suo raggio: $A/r^2 = \pi$.

Per questi motivi, i valori di π esaminati derivano da un confronto tra le attuali formule e i metodi utilizzati dagli antichi per calcolare l'area del cerchio o la lunghezza della circonferenza.

I Babilonesi

Il valore usato dai babilonesi si deduce da una tavoletta in scrittura cuneiforme, dalla quale si può osservare come i matematici di allora abbiano confrontato il perimetro del cerchio con quello dell'esagono in esso inscritto.



Essi sapevano che il perimetro di un esagono corrisponde al triplo del diametro del cerchio circoscritto; infatti, poiché

$l_6 = r$ segue $2p_6 = 6r$ ossia $2p_6 = 3\ (2r)$ con 2r che risulta essere il diametro del cerchio.

Assumendo questa misura come approssimazione della lunghezza della circonferenza, si ha:

$$2p_6 = 3\ (2r)$$

mentre, per noi,

$$C = 2r\,\boldsymbol{\pi}$$

quindi

$$2r\,\boldsymbol{\pi} = 3\ (2r)$$

da cui

$$\boldsymbol{\pi} = 3$$

Da alcune tavolette cuneiformi è emerso che i babilonesi utilizzavano anche formule dalle quali si deduce un valore di $\boldsymbol{\pi}$ dato dalla seguente espressione

$$\boldsymbol{\pi} = 3 + \frac{1}{8}$$

Gli Egizi

Le conoscenze matematiche degli egizi sono documentate da diversi papiri e, in particolare, dal famoso documento conosciuto con il nome di Papiro di Rhind. Tale prezioso documento, della lunghezza di circa 20 metri, prende il nome da A. Henry Rhind che lo acquistò a Luxor nel 1858 e in seguito ne fece dono al British Museum di Londra, dove è tuttora conservato.

Il papiro contiene il ***libro di calcolo di Ahmes,*** così chiamato dal nome dello scriba che trascrisse un testo di matematica risalente a diversi secoli precedenti. In questo documento sono trattati 80 problemi dai quali si possono ottenere delle regole per la misura di campi con diversa forma, elementi di calcolo frazionario e accorgimenti pratici per la determinazione del volume di alcuni solidi.

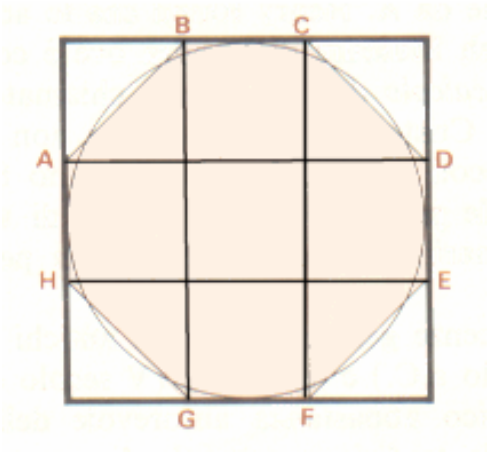
Un ragguardevole risultato ottenuto dagli Egiziani, relativamente alle costruzioni, si trova nel problema 50. Esso concerne il calcolo dell'area di un campo circolare di diametro noto e, conseguentemente, riguarda l'utilizzo implicito del numero $\boldsymbol{\pi}$. Dalla traduzione del testo egizio risulta che la soluzione del problema si ricava togliendo dal diametro la sua nona parte e moltiplicando per se stesso il risultato ottenuto. In notazione attuale si avrebbe:

- indicando con 2r la misura del diametro del cerchio,
- con A l'area di tale cerchio,

$$A = \left(2r - \frac{2r}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}r\right)^2 = 3{,}160....r^2$$

Poiché la formula oggi utilizzata per calcolare l'area di un cerchio è $\mathbf{A = \pi r^2}$**,** dal confronto delle due scritture si vede come, per gli antichi matematici egiziani, il rapporto tra la circonferenza e

il suo diametro, cioè il numero che oggi si chiama **π,** avrebbe avuto il valore 3,16, che differisce dal nostro valore approssimato 3,14 di una quantità che è pari allo 0,6% circa.



È presumibile che la formula precedente sia stata ricavata dal confronto tra l'area del cerchio, quella di un quadrato e di un ottagono.

Dati:

- un cerchio di diametro 2r,
- un quadrato circoscritto al cerchio, quindi di lato 2r,
- un ottagono la cui area è considerata prossima a quella del cerchio stesso,

si suddivide la superficie del quadrato in 9 quadratini. Osservando la figura, si nota che l'ottagono, quindi il cerchio, ricopre per intero 5 quadratini, mentre nei quattro vertici del quadrato solo la metà dei quadratini è interna all'ottagono. Considerando che quattro mezzi quadratini formano 2 quadratini interi, l'area dell'ottagono, quindi del cerchio, si può ricavare moltiplicando per 7 = 5 + 2 volte l'area di un singolo quadratino di lato $\frac{1}{3}2r$

Ossia, l'area è:

$$7\left(\frac{2r}{3}\right)^2 = 7\frac{(2r)^2}{9} = \frac{7}{9}(2r)^2 = \frac{7*9}{9*9}(2r)^2 = \frac{63}{81}(2r)^2 \cong \frac{64}{81}(2r)^2 = \left(\frac{8}{9}2r\right)^2 = \left(\frac{9}{9}2r - \frac{1}{9}2r\right)^2 = \left(2r - \frac{2r}{9}\right)^2$$

Gli Ebrei e π nella Bibbia

Gli Ebrei, piccolo popolo di pastori nomadi che conducevano una vita povera e stentata, si stabilirono nel territorio della Palestina Meridionale, già occupata dai Filistei. In questo territorio, molto ambito per la particolare posizione geografica, poiché importante crocevia per le comunicazioni ed i commerci tra Oriente ed Occidente, essi fondarono un piccolo regno: il primo regno monoteista della storia.

Unica fonte d'informazione sulla vita degli ebrei, almeno fino al X secolo, è la Bibbia: raccolta di libri differenti per autore, data, genere e stile. In questo prezioso documento vi sono riferimenti dai quali si può dedurre il valore attribuito dagli Ebrei al rapporto tra la circonferenza e il suo diametro. Uno di tali riferimenti si trova nella descrizione degli arredi e attrezzature bronzee del tempio del re Salomone eseguite da Chiram di Tiro, l'artigiano più abile del paese nel lavorare il bronzo.

Nel Primo libro dei Re 7-15,16 si legge: "Venuto presso il Re Salomone, eseguì tutti i suoi lavori. Fuse le due colonne di bronzo; l'altezza di una colonna era di 18 cubiti, mentre una corda di 12 cubiti ne misurava la circonferenza".

Sempre nel Primo libro dei Re 7-23,27 si legge: ”Fece poi il mare in metallo fuso (il mare era una grande riserva d’acqua sacra, che simboleggiava l’oceano cosmico, utilizzata per le benedizioni e le purificazioni); **da un orlo all’altro misurava 10 cubiti**; tutt’intorno era circolare; la sua altezza era di 5 cubiti, **mentre una cordicella di 30 cubiti ne misurava la circonferenza.** Sotto l’orlo v’era un ornato di coloquintidi, dieci ogni cubito, che formavano un giro attorno al mare; le coloquintidi erano di due ordini; fuse insieme al mare. Questo aveva lo spessore di un palmo e l’orlo come quello di una coppa, a fior di loto. Conteneva 2000 bat. Poggiava su 12 buoi di cui tre guardavano a settentrione, tre ad occidente, tre a mezzogiorno e tre ad oriente. Il mare poggiava su di essi e le loro parti posteriori erano rivolte all’interno.”

Se la circonferenza misurava 30 cubiti e la distanza tra un bordo e l’altro, quindi il diametro, era di 10 cubiti, risulta che:

$$C = 2r\,\pi$$
$$30 = 10 \cdot \pi$$
$$\pi = 30/10$$
$$\pi = 3$$

π in Grecia

Nella storia della civiltà i Greci occupano un posto prioritario e nella storia della matematica ciò è ancor più rilevante. Essi diedero vita ad una cultura che fu la più influente sullo sviluppo di quella occidentale moderna e tra quelle decisive per la fondazione della matematica quale noi la concepiamo oggi.

Con l’anno 1000 a.C. e lo sviluppo della civiltà greca si assiste ad un completo cambiamento dello scenario storico, occupato, sino a quel momento, da sovrani, sacerdoti e funzionari che detenevano il potere e soverchiavano grandi masse popolari, il cui unico compito era quello di lavorare. Con la civiltà greca, la politica cessa di essere, per la prima volta nella storia, un potere riservato a pochi individui e diventa attività del CITTADINO. Accanto alla libertà di governo si sviluppano la libertà di pensiero e dei molteplici interessi della fervida mente umana, permettendo così la nascita della filosofia e delle scienze.

L’evoluzione della grande civiltà greca si è svolta in diverse tappe: una delle più importanti e fiorenti è, oltre ***all’ETÀ CLASSICA (490 – 338 a.C.)***, ***l’ETÀ ELLENISTICA (338 – 146 a.C.),*** quando Alessandro Magno, figlio del grande condottiero Filippo il Macedone, sconfigge l’Impero Persiano e conquista vasti territori in oriente. La Grecia, ormai provincia della Macedonia, vede aprirsi nuovi orizzonti e la sua civiltà si diffonde nel Vicino Oriente.

Le origini della matematica greca sono incentrate sulle scuole *ionica* e *pitagorica* e ruotano attorno ai loro principali rappresentanti: Talete e Pitagora. Le notizie che si hanno sul loro pensiero e sulle loro opere, però, sono dovute a racconti e testimonianze dovute ai secoli posteriori e non sempre adeguatamente documentate.

Le prime attestazioni matematiche e scientifiche giunte sino a noi risalgono all’epoca di Platone, cioè al IV secolo a.C. Di fatto, però, nella seconda metà del V secolo sono frequenti e unanimi le testimonianze sui lavori di un piccolo gruppo di matematici molto interessati a problemi che gettarono le fondamenta di gran parte degli sviluppi successivi della geometria.

L'attività matematica non era più concentrata, in modo quasi esclusivo, in due regioni situate agli estremi opposti del mondo greco, ma aveva esteso il suo raggio d’azione a quasi tutte le regioni affacciate sul Mediterraneo. In quella che è oggi l’Italia meridionale operavano Archita di Taranto (nato verso il 428 a.C.) e Ippaso di Metaponto (attivo verso il 400 a.C.); ad Abdera, in Tracia, si trova Democrito (nato verso il 460 a.C.); più vicino al centro del mondo greco, nella penisola attica, era Ippia di Elide (nato verso il 460 a.C.). Ad Atene vissero in tempi diversi, lungo la seconda metà del V secolo a.C., tre scienziati originari di altre regioni: Ippocrate di Chio (attivo verso il 430 a.C.), Anassagora di Clazomene (morto nel 428 a.C.) e Zenone di Elea (attivo verso il 450 a.C.).

È in questo contesto che accadono importanti episodi riguardanti la storia di **π,** in quanto dal fervore intellettuale greco nascono curiosità e problemi che impegneranno per secoli le menti dei matematici.

Il primo pensatore greco a tentare di trovare un rapporto definitivo fra un cerchio e un quadrato fu **Anassagora di Clazomene** (500-428 a.C.). Egli, filosofo della natura più che matematico, rappresentava il classico prototipo del greco erudito, con la mentalità del ricercatore e sete di conoscenza. Questa sua vivacità intellettuale lo portò ad interessarsi attivamente allo studio dei problemi matematici. Si narra che Anassagora, imprigionato ad Atene per empietà, poiché sosteneva una teoria in base alla quale il sole non aveva carattere divino e la luminosità della luna si doveva al suo riflettere la luce dell'astro diurno, si propose di ***quadrare il cerchio,*** sempre con i tradizionali strumenti matematici dei greci: la riga non graduata e il compasso.

Ippocrate di Chio e la quadratura delle lunule

Nel V sec. a.C., Ippocrate di Chio, un po' più giovane di Anassagora, studiando la quadratura delle lunule sembrava progredire verso la soluzione del problema sulla quadratura del cerchio.

Di lui si narra che verso il 430 a.C. lasciò la terra di Chio e si trasferì ad Atene per intraprendere la carriera di mercante. Aristotele riferisce che Ippocrate fosse meno scaltro di Talete e che a Bisanzio fu depredato di tutte le sue sostanze. In ogni caso, Ippocrate non si lamentò mai del fatto e rivolse tutta la sua attenzione allo studio della geometria. Proclo scrive che Ippocrate compose un'opera, andata perduta, dal titolo "Elementi di geometria" che anticipava di oltre un secolo l'opera di Euclide. Delle sue opere non rimane nulla, ad eccezione di un frammento che Simplicio (attivo intorno al 520 d.C.) afferma di aver copiato fedelmente dal testo *Storia della matematica* di Eudemo. In questo breve testo l'autore descrive una parte dell'opera di Ippocrate che riguarda la quadratura delle lunule:

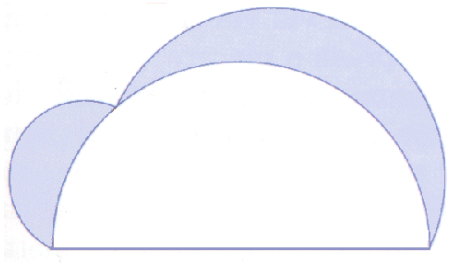


figure limitate da due archi di cerchio di raggio diverso, ossia appartenenti a due circonferenze differenti, con gli estremi coincidenti e giacenti dalla stessa parte rispetto alla corda comune.

Il frammento di Eudemo attribuisce ad Ippocrate il seguente teorema:

le aree di due cerchi stanno tra loro come i quadrati costruiti sui loro diametri.

e riferisce, inoltre, che Ippocrate avrebbe dedotto da questo il teorema per cui

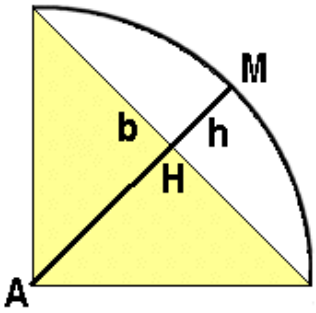
segmenti di cerchio simili stanno tra loro nello stesso rapporto che intercorre tra i quadrati costruiti sulle loro basi,

Eudemo si mostra convinto del fatto che Ippocrate avesse fornito la dimostrazione del primo teorema con l'utilizzo della teoria sulle proporzioni sviluppate dalla scuola pitagorica, anche se la cosa appare inverosimile per l'epoca, in quanto la teoria delle proporzioni, probabilmente, era in grado di trattare soltanto grandezze commensurabili. La dimostrazione di questo teorema si trova anche nel XII Libro, Proposizione 2, degli Elementi di Euclide, ma tale dimostrazione deriva da Eudosso, che formulò una più completa teoria delle proporzioni e che visse in un periodo intermedio tra quello di Ippocrate e di Euclide.

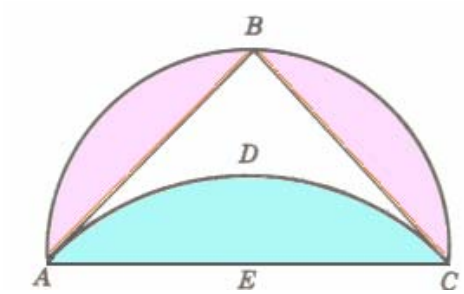
Se Ippocrate riuscì effettivamente a dare una dimostrazione, gli si può riconoscere il merito di aver introdotto nella matematica il metodo della dimostrazione indiretta, ossia il metodo della ***reductio ad absurdum,*** oggi nota come dimostrazione per assurdo. Questo metodo consiste nel considerare che una data affermazione può essere vera o falsa e nel caso essa sia falsa deve essere vero il suo contrario. Ad esempio: se, date due rette, è falsa l'affermazione "le *due rette sono*

parallele", allora deve essere vero che "*le due rette non sono parallele*". Partendo da questa seconda affermazione, considerata vera, attraverso un rigoroso ragionamento si giunge ad un'affermazione o ad una situazione assurda: quindi, se il fatto di considerare come vera la seconda proposizione porta ad un assurdo, significa che, in realtà, è vera la prima.

Ippocrate iniziò le osservazioni sulle lunule con l'esame di un triangolo rettangolo isoscele.



Egli fece riferimento al già citato teorema riguardante i segmenti circolari simili, cioè segmenti circolari che, se avessero la stessa base, sarebbero perfettamente sovrapponibili; quindi, segmenti circolari per i quali è costante il rapporto tra la corda **b,** che rappresenta la loro base, e il segmento **h** *(HM),* differenza tra il raggio della circonferenza alla quale appartengono (*AM*) e il segmento *AH* intercettato su tale raggio dalla corda di base.



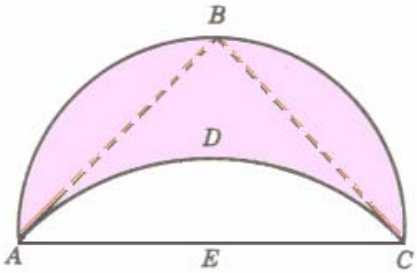
Secondo Ippocrate, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele *ABC* si ha:

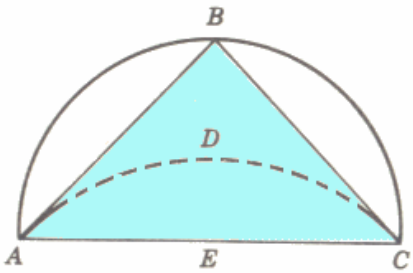
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Dal fatto che i segmenti circolari stanno tra loro come il quadrato delle loro basi, risulta che il segmento circolare costruito sull'ipotenusa *AC (AECD)* è equivalente alla somma dei due segmenti circolari costruiti sui cateti *AB* e *BC*.

Ora:

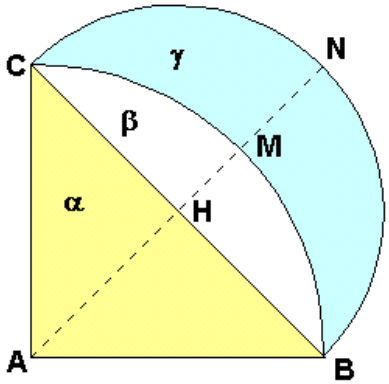
- sottraendo dall'intero semicerchio il segmento circolare costruito su *AC* (in azzurro), si ottiene la lunula *ADCB*;
- sottraendo dall'intero semicerchio i due segmenti circolari costruiti sui cateti *AB* e *BC* (in rosa), si ottiene il triangolo *ABC*;





Si ha, pertanto, che la lunula e il triangolo sono equivalenti per differenza di figure equivalenti.

Con le attuali conoscenze si potrebbe giungere al risultato di Ippocrate con l'esecuzione di semplici calcoli.



Considerando un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio *AB*, di cui il triangolo *ABC* rappresenta la quarta parte, si costruisce sull'ipotenusa di tale quadrato un semicerchio.

Il semicerchio *BNC*, costruito sull'ipotenusa del triangolo, è equivalente al settore *ABMC* di raggio *AB*.

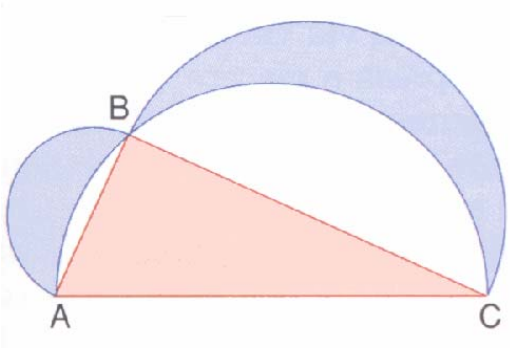
Infatti, posto $AB = l$:

$$area\ semicerchio = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi\, l^2.2}{2.4} = \frac{\pi\, l^2}{4}$$

$$area\ del\ settore\ circolare = \frac{1}{4}\pi\, AB^2 = \frac{1}{4}\pi\, l^2$$

Se dall'area del semicerchio si sottrae il segmento circolare *CBM* (area bianca della figura), si ottiene la lunula *CMBN* (area azzurra); se dal settore circolare si sottrae lo stesso segmento, si ottiene il triangolo isoscele. Le due figure risultano allora equivalenti per differenza di figure equivalenti.

Per un triangolo rettangolo qualsiasi si può seguire un ragionamento analogo.

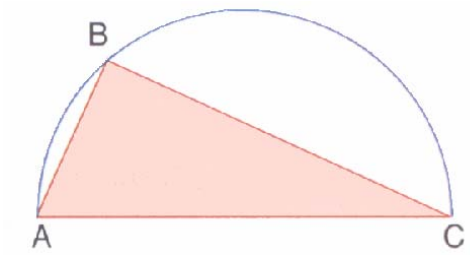


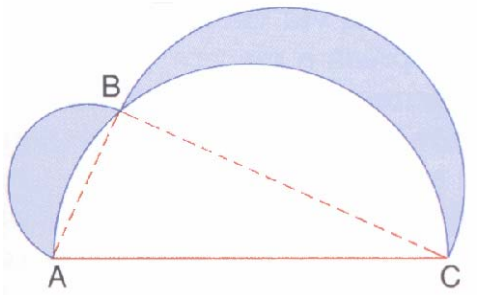
Costruiti i semicerchi sui tre lati e applicando il teorema di Pitagora, si ha

$$AC^2 = AB^2 + BC^2;$$

quindi, per il teorema sui segmenti circolari simili, il semicerchio costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei semicerchi costruiti sui cateti.

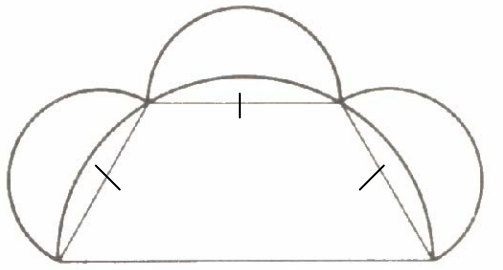
- Sottraendo dal semicerchio costruito sull'ipotenusa i due segmenti circolari di base AB e BC (area in bianco) si ottiene il triangolo ABC;
- Sottraendo dai semicerchi costruiti sui cateti gli stessi segmenti circolari si ottengono le lunule rappresentate in azzurro.





Eudemo descrive anche il procedimento con il quale Ippocrate ottiene la quadratura di una lunula costruita su un trapezio isoscele la cui base minore è congruente ai lati obliqui. Lo stesso teorema viene riportato anche da Alessandro di Afrodisia, attivo verso il 200 d.C., che però fornisce una dimostrazione un po' diversa rispetto a quella di Eudemo.

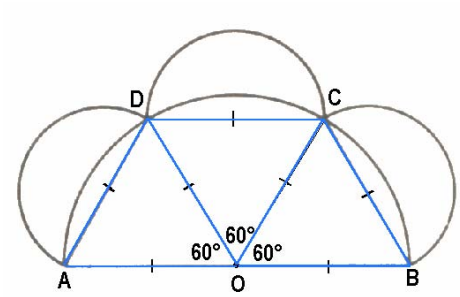
In base alla costruzione pervenutaci attraverso Alessandro, risulta che:



se sul diametro di un semicerchio si costruisce un trapezio isoscele con tre lati uguali, e se sui tre lati uguali si costruiscono semicerchi, allora il trapezio ha un' area uguale alla somma delle quattro aree curvilinee rappresentate dalle tre lunule uguali e dal semicerchio costruito su uno dei lati uguali del trapezio.

Una dimostrazione di questo teorema è la seguente:

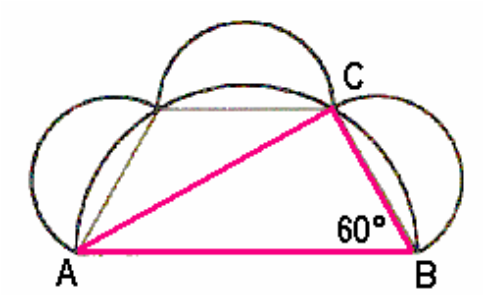
1) unendo i vertici del trapezio isoscele con il centro *O* del semicerchio, si ottengono tre triangoli che risultano essere equilateri. Essi, infatti, sono triangoli isosceli tra loro congruenti in base al terzo criterio di congruenza dei triangoli, in quanto hanno i tre lati rispettivamente congruenti. Gli angoli al vertice *O* di tali triangoli, essendo congruenti e supplementari, misurano 60°, pertanto i triangoli sono anche equilateri: per questo motivo anche gli angoli in *A* e in *B* misureranno 60°.



2) Il triangolo ABC, essendo rettangolo in C perché inscritto in una semicirconferenza e avendo un angolo acuto di 60°, risulta essere la metà di un triangolo equilatero.

Quindi, con calcoli attuali, posto $CB = a$, si ottiene:

- $CB = a$ $\qquad CB^2 = a^2$
- $AB = 2a$ $\qquad AB^2 = 4a^2$
- $AC = a\sqrt{3}$ $\qquad AC^2 = 3a^2$



Considerando ora i semicerchi costruiti sui lati del triangolo rettangolo *ABC*, dal momento che essi stanno tra loro come il quadrato dei rispettivi diametri, si ha che

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

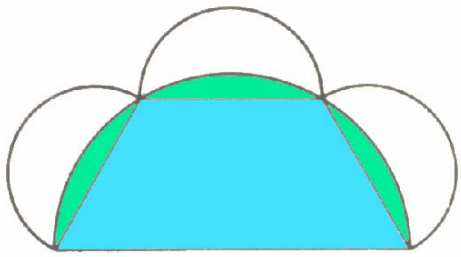
e sostituendo

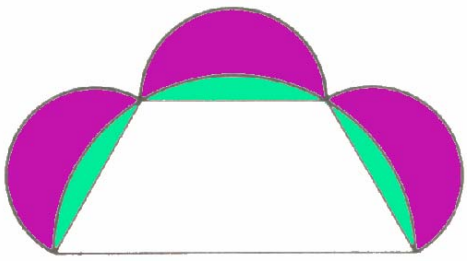
$$AB^2 = 3a^2 + a^2$$
$$AB^2 = 4a^2$$

Ossia: **il semicerchio costruito su *AB* è equivalente a quattro semicerchi congruenti a quello costruito su *CB*.**

3) Da ciò risulta che:

- Sottraendo dal **semicerchio di diametro AB** i tre *segmenti circolari* relativi ai lati congruenti del trapezio (aree verdi) si ottiene, appunto, il trapezio;
- Sottraendo da un'area pari **a quattro semicerchi** come quelli costruiti sui lati congruenti del trapezio gli stessi *segmenti circolari*, si ottengono le lunule relative agli stessi tre lati del trapezio (aree viola) aggiunte ad uno dei semicerchi.





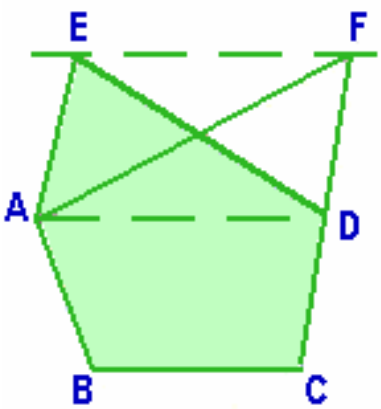
Il teorema di Ippocrate sulle aree dei cerchi sembra rappresenti la prima precisa teoria concernente la misurazione di aree curvilinee del mondo greco. La sicura attribuzione ad Ippocrate dei teoremi a lui riconosciuti è alquanto controversa, tuttavia i teoremi riportati nei libri III e IV degli Elementi di Euclide sembrano effettivamente dovuti a lui.

Con tali teoremi si ebbe la prima quadratura di una figura curvilinea.

In base a questi risultati sembrava che, potendo quadrare le lunule e il semicerchio si potesse arrivare a quadrare il cerchio; infatti i greci avevano già a disposizione diversi teoremi per trasformare i poligoni in altri equivalenti: essi utilizzavano in particolare triangoli, dai quali si poteva poi passare ai rettangoli e ai quadrati.

Trasformazione di poligoni in altri equivalenti

Trasformare un poligono in un triangolo equivalente.

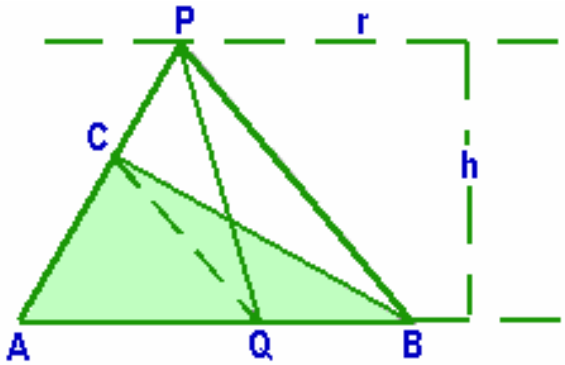


Dato, ad esempio, un pentagono *ABCDE*, lo si vuole trasformare in un triangolo equivalente.

Considerati tre vertici consecutivi *A, E, D*, sia *F* il punto in cui la parallela alla base *BC* condotta da E interseca la retta *CD*. In tale costruzione i due triangoli *AED* e *AFD* risultano equivalenti perché hanno la stessa base *AD* e uguale altezza. Ne deriva l'equivalenza del pentagono *ABCDE* e del quadrilatero *ABCF,* perché ottenuti aggiungendo rispettivamente ai triangoli equivalenti *AED* ed *AFD* il quadrilatero *ABCD*.

Con tale metodo è possibile trasformare un poligono in un altro ad esso equivalente avente un lato in meno, per cui, reiterando l'applicazione di tale procedimento al quadrilatero *ABCF*, si ottiene un triangolo equivalente al poligono assegnato.

Trasformare un triangolo in un altro equivalente di data altezza



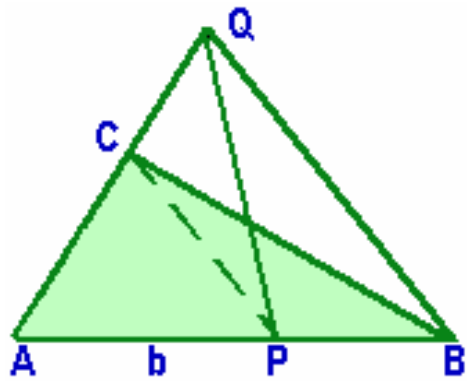
Dato un triangolo *ABC*, lo si vuole trasformare in un altro che sia ad esso equivalente ed abbia altezza assegnata **h**.

Dalla stessa parte di *C* rispetto ad *AB*, si conduca la retta *r parallela ad AB*, avente distanza da *AB* uguale ad **h**, e si indichi con *P* il punto in cui la retta *AC* interseca *r*.

Si conduca ora da C la parallela a *PB* e sia Q il punto in cui tale parallela interseca *AB*.

Dal parallelismo dei segmenti *PB* e *CQ* segue l'equivalenza dei triangoli *BCQ* e *PCQ* in quanto hanno la stessa base *CQ* ed uguale altezza; conseguentemente, anche i triangoli *ABC* ed *APQ* sono equivalenti, perché ottenuti dai precedenti aggiungendo lo stesso triangolo *AQC*.
Si conclude perciò che *APQ* è il triangolo lo richiesto.

Trasformare un triangolo in un altro equivalente di data base



Dato un triangolo *ABC*, lo si vuole trasformare in un altro equivalente di base assegnata **b**.

Si consideri, sulla semiretta *AB*, il segmento *AP* congruente al segmento **b**. Si unisca *P* con *C* e si tracci la parallela a *PC* condotta da B: sia Q il punto in cui tale parallela interseca la retta *AC*. Il triangolo *ABC* è equivalente al triangolo *APQ* avente *AP* = **b**. Infatti, dal parallelismo dei segmenti *PC* e *BQ,,* segue l'equivalenza dei triangoli *PCB* e *PCQ* aventi la stessa base *PC* ed uguale altezza. Conseguentemente anche i triangoli *ABC* ed *APQ* sono equivalenti, perché ottenuti dai precedenti aggiungendo il triangolo *APC*. Si conclude, pertanto, che *APQ* è il triangolo richiesto.

Trasformare un triangolo in un rettangolo avente un lato uguale ad un segmento dato.

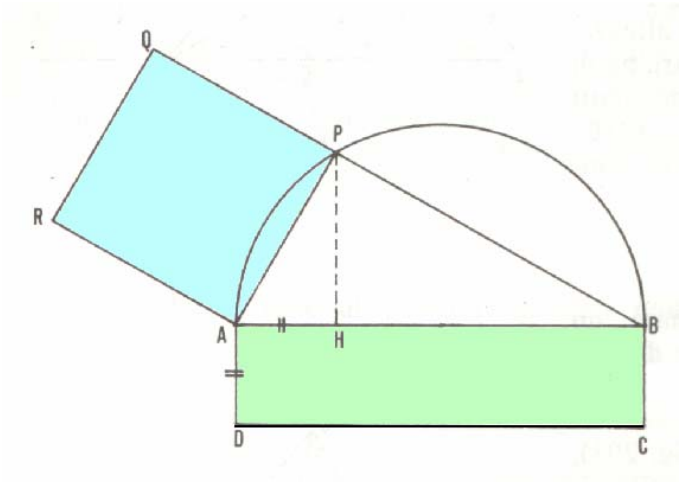
Se *h* è il segmento dato, per risolvere il problema, si trasforma preventivamente il triangolo in un altro equivalente di altezza *h*; poi si trasforma il triangolo ottenuto in un parallelogrammo che ha per base metà base del triangolo e per altezza l'altezza *h* del triangolo.

Il parallelogrammo ottenuto ed il rettangolo cercato avranno uguale base ed uguale altezza.

Grazie ai precedenti teoremi, i matematici greci erano in grado di trasformare un poligono qualsiasi in un triangolo ad esso equivalente; da un triangolo qualunque sapevano ottenerne, a seconda delle necessità, un altro equivalente di data base o di data altezza, e da questo, infine, costruire un rettangolo equivalente.

A questo punto, grazie a quello che può essere considerato un primo ruolo dei teoremi di Euclide, cioè la trasformazione di un rettangolo in un quadrato equivalente, i matematici potevano pensare di essere sulla buona strada per ottenere la quadratura del cerchio.

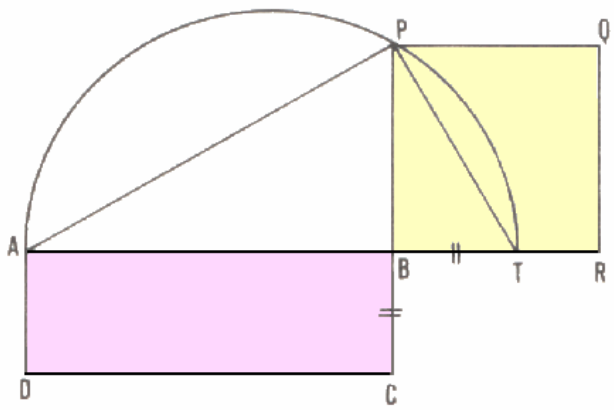
Un primo ruolo dei teoremi di Euclide: la quadratura dei rettangoli



1° metodo. Dato il rettangolo ***ABCD***, si descriva una semicirconferenza avente il diametro uguale al lato maggiore *AB* del rettangolo.

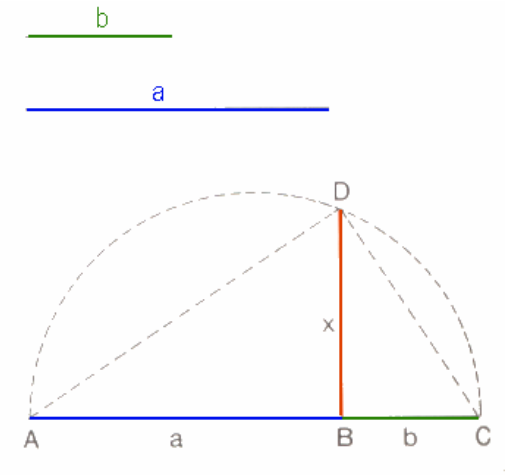
Preso sopra *AB* il segmento *AH* = *AD* e detto *P* il punto in cui la perpendicolare in *H* ad *AB* interseca la semicirconferenza costruita, si osserva che il triangolo *APB* è rettangolo in *P* perché inscritto in una semicirconferenza.

Costruito sul cateto *AP* il quadrato *APQR*, esso è equivalente al rettangolo *ABCD* in base al primo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo *APB*. Infatti, il quadrato *APQR* risulta equivalente al rettangolo che ha le dimensioni uguali all'ipotenusa *AB* ed alla proiezione *AH* del cateto *AP* sopra *AB;* essendo *AH* = *AD* risulta che **ABCD** è equivalente a **APQR.**



2° metodo. Dato il rettangolo *ABCD*, si prolunghi il lato *AB* di un segmento *BT* = *BC* e si descriva una semicirconferenza di diametro *AT*. Detto *P* il punto in cui la retta *CB* interseca la semicirconferenza, si osserva che il triangolo *APT* è rettangolo in *P* perché inscritto in una semicirconferenza

Considerato il quadrato *BPQR* costruito sull'altezza *PB* del triangolo, si ha che esso è equivalente al rettangolo *ABCD* dato. Infatti, per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo *APT,* il quadrato *BPQR* risulta equivalente al rettangolo che ha le dimensioni uguali alle proiezioni *AB* e *BT* dei cateti sull'ipotenusa. Essendo *BT=BC,* senz'altro si conclude che *ABCD* è equivalente a *BPQR* .



Quindi i greci non avevano alcuna difficoltà, dato un rettangolo di dimensioni **a** e **b,** a determinare il quadrato ad esso equivalente; cioè non avevano difficoltà a trovare il termine medio proporzionale tra due numeri dati:

a : x = x : b.

A questo proposito, considerati **a** e **b** i segmenti iniziali, si devono considerare i segmenti adiacenti *AB* e *BC*, rispettivamente congruenti ai segmenti dati. La costruzione procede poi in base alle seguenti fasi successive:

1. si individua il punto medio del segmento AC e si descrive una semicirconferenza di diametro AC = a + b;
2. Si conduce da *B* la perpendicolare al diametro, sino ad incontrare la circonferenza in *D*;
3. In segmento *BD* è il segmento richiesto, perché congiunto *D* con gli estremi *A* e *C* del diametro, il triangolo *ADC* risulta essere rettangolo in *D* perché inscritto in una semicirconferenza, pertanto applicando il secondo teorema di Euclide si ha

$$a \cdot x = x \cdot b$$

Poco tempo dopo Ippocrate, **Antifone** (sofista del V secolo a.C.) e **Brisone di Eraclea** tentarono di trovare l'area di un cerchio usando il *principio di esaustione*:

"Se si prende un esagono e si raddoppiano i suoi lati trasformandolo in un dodecagono, e poi li si raddoppia ancora, e ancora, prima o poi si avrà un poligono con un numero di lati tanto grande da essersi trasformato in un cerchio."

Prima Antifone stimò l'area di un cerchio, calcolando l'area dei successivi poligoni in esso inscritti. Poi Brisone calcolò le aree di due poligoni, uno inscritto nel cerchio e l'altro ad esso circoscritto; in tal modo ipotizzò che l'area del cerchio dovesse essere compresa fra le aree dei due poligoni.

Eudosso di Cnido e il metodo di esaustione

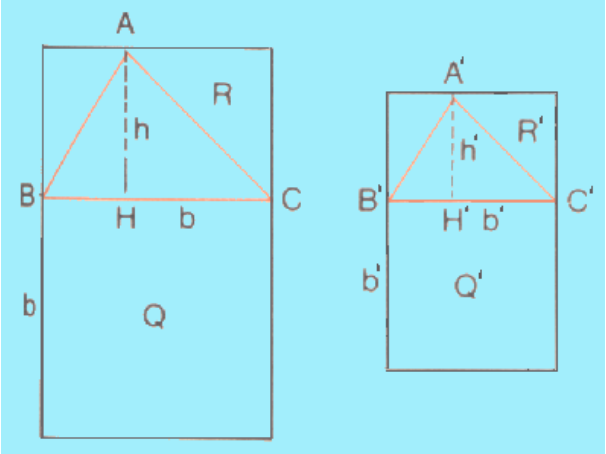
L'idea di queste costruzioni si deve a Eudosso di Cnido, attivo tra il 408 e il 355 a.C., al quale è attribuita anche l'ingegnosa teoria sulle proporzioni che Euclide riporta nel suo V libro degli *Elementi.* Tale teoria fu una conseguenza della crisi della scuola pitagorica, dovuta alla scoperta degli irrazionali, a cui seguì la netta separazione, per il mondo matematico greco, tra aritmetica e geometria. Questa separazione esclude la possibilità di esprimere il processo di misura in termini numerici, pertanto, in tale contesto, "misurare" una grandezza significa precisare in quale relazione quantitativa essa si trova con un'altra: si hanno quindi teoremi che giustificano come un triangolo sia la metà di un rettangolo che abbia la stessa base e la stessa altezza.

Un problema di questo genere assume aspetti molto più complicati quando si tratta di confrontare figure curvilinee o di nominare i loro rapporti; pertanto, per stabilire che rapporto intercorre fra due cerchi C_1 e C_2, occorre procedere per passi successivi.

A) ESAME di ALCUNE PROPRIETÀ riguardanti LE FIGURE SIMILI

Per definizione**,**

due figure sono simili quando hanno gli angoli congruenti e i lati omologhi in proporzione.



Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.

Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli simili.

Sui lati omologhi $BC = b$ e $B'C' = b'$ si costruiscono due quadrati, indicati brevemente con Q,e Q', e due rettangoli aventi per altezze le altezze $AH = h$ e $A'H' = h'$ dei triangoli dati, indicati per brevità con R ed R'.

I rettangoli Q ed R, avendo basi uguali, stanno fra loro come le rispettive altezze, perciò

$$Q : R = b : h.$$

e in modo analogo

$$Q' : R' = b' : h'.$$

In triangoli simili, inoltre, le basi stanno tra loro come le rispettive altezze, quindi

$$b : h = b' : h'$$

Di conseguenza, sarà:

$$Q : R = Q' : R'$$

od anche, permutando i medi,

$$Q : Q' = R : R'.$$

Considerando, però, che le estensioni dei rettangoli R ed R' sono doppie di quelle dei triangoli dati T, T', sussiste anche la proporzione:

$$T : T' = R : R'$$

e quindi ancora

$$T : T' = Q : Q'.$$

Tale relazione può anche essere scritta nel modo seguente:

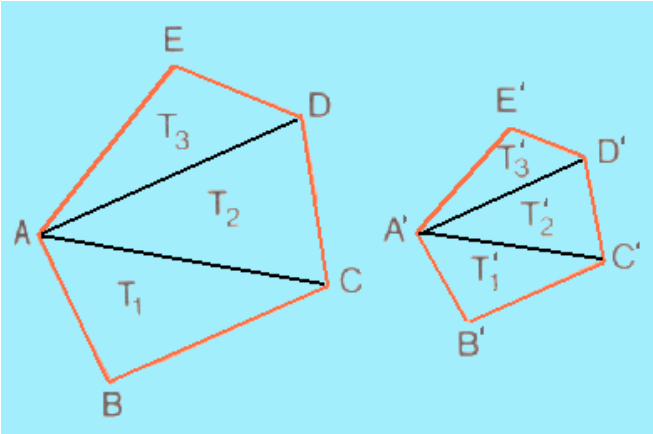
$$\boldsymbol{T : T' = BC^2 : B'C'^2}$$

La similitudine tra poligoni gode di diverse proprietà, analoghe a quelle enunciate per la similitudine dei triangoli; alcune di queste sono le seguenti:

- **Se da due vertici omologhi di due poligoni simili si conducono tutte le possibili diagonali, i poligoni restano divisi nello stesso numero di triangoli ordinatamente simili.**
- **In due poligoni simili il rapporto di due diagonali omologhe è uguale a quello di due lati omologhi.**
- **I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro come due lati omologhi.**
- **Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.**

Dai vertici omologhi A e A' dei due poligoni simili $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$, si conducono tutte le possibili diagonali. I due poligoni risultano suddivisi nei triangoli T_1, T_2, T_3 e T'_1, T'_2 T'_3, ordinatamente simili, e, per il teorema riguardante le aree di triangoli simili, si ha

$$T_1 : T'_1 = q(AC) : q(A'C')$$



$$T_2 : T'_2 = q(AC) : q(A'C').$$

Quindi, per la proprietà transitiva dei rapporti

$$T_1 : T'_1 = T_2 : T'_2$$

Analogamente si dimostra che

$$T_2 : T'_2 = T_3 : T'_3$$

Dalle ultime due proporzioni si ha

$$(T_1 + T_2 + T_3) : (T'_1 + T'_2 + T'_3) = T_1 : T'_1$$

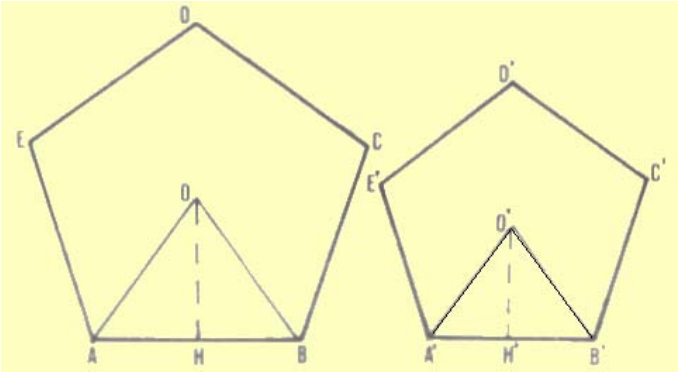
o anche

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = T_1 : T'_1.$$

Ma i triangoli T_1 e T'_1 stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, $A'B'$, pertanto si conclude che

$$\boldsymbol{ABCDE : A'B'C'D'E' = q(AB) : q(A'B').}$$

- **Due poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili; inoltre i loro lati e i loro perimetri stanno tra loro come i raggi delle circonferenze inscritte e come quelli delle circonferenze circoscritte.**



Con riferimento ai pentagoni regolari $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ di centri O ed O', di apotemi OH e $O'H'$, raggi delle circonferenze inscritte, e con OA e $O'A'$, raggi delle circonferenze circoscritte, si ha

$$2p : 2p' = AB : A'B'.$$

I triangoli OAB ed $O'A'B'$, sono simili in quanto hanno le coppie di angoli in A e A' e in B e B' congruenti perché metà di angoli congruenti, quindi si ha:

$$AB : A'B' = 0A : O'A'$$

e, per il teorema delle altezze,

$$AB : A'B' = OH : O'H'.$$

Dal confronto delle tre proporzioni risulta:

$$\boldsymbol{2p : 2p' = OA : O'A',}$$

$$\boldsymbol{2p : 2p' = OH : O'H'}$$

ed il teorema è dimostrato.

B) ESAME di ALCUNI TEOREMI riguardanti POLIGONI REGOLARI E CIRCONFERENZE

I poligoni regolari P_1 e P_2 di ugual numero di lati, inscritti nelle circonferenze c_1 e in c_2, stanno fra loro come i quadrati dei diametri dei cerchi:

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$$

Questo teorema si dimostra confrontando le proporzioni ottenute dalle proprietà riguardanti i poligoni simili e i teoremi dimostrati in precedenza:

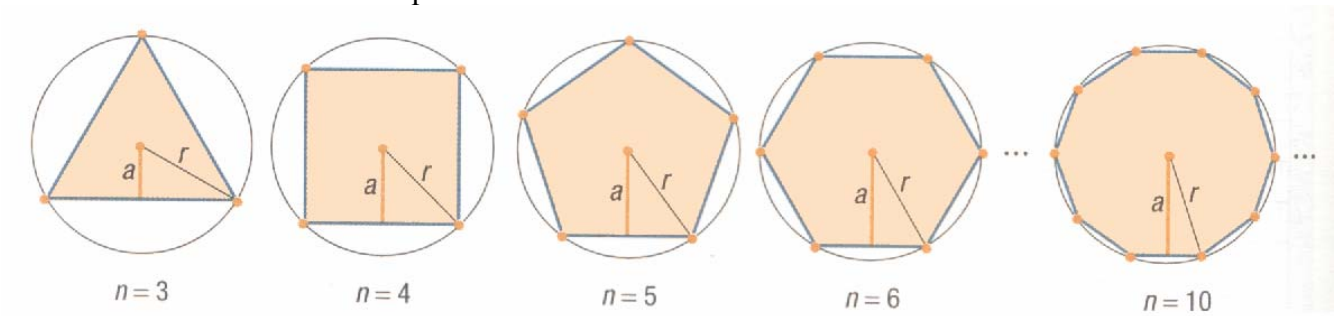
- I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro come due lati omologhi.
- Due poligoni simili stanno tra loro come i quadrati di due lati omologhi.
- In due poligoni simili, due lati omologhi stanno tra loro come le rispettive altezze o come due altri segmenti omologhi.
- I lati di due poligoni regolari stanno tra loro come i rispettivi raggi e apotemi.

Inoltre, facendo riferimento alla figura precedente, poiché per i poligoni regolari iscritti in una circonferenza i segmenti *OA* e *O'A'* sono i raggi della circonferenza, considerando che il diametro è il doppio del raggio, si arriva a dimostrare l'affermazione iniziale

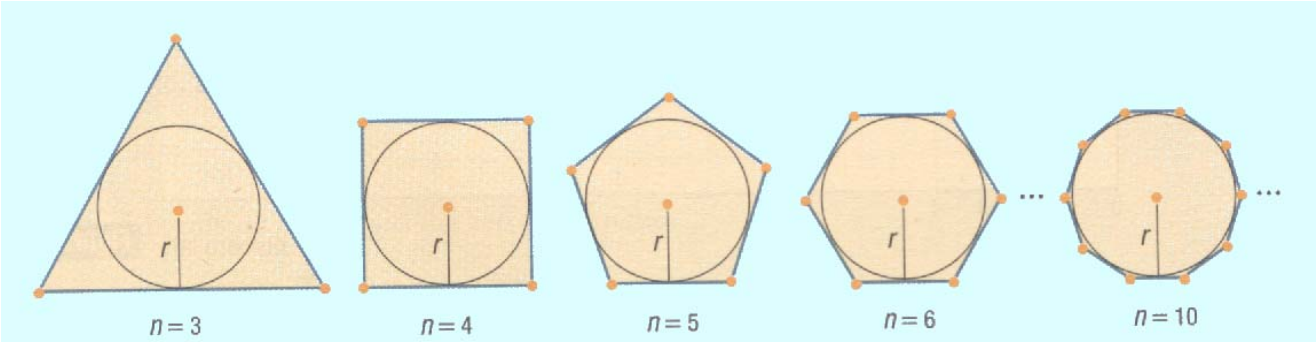
$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2.$$

C) DEFINIZIONE di UNA RELAZIONE TRA I POLIGONI REGOLARI SIMILI, INSCRITTI E CIRCOSCRITTI AD UN CERCHIO, E IL CERCHIO STESSO.

I matematici dell'antica Grecia si accorsero che aumentando progressivamente il numero dei lati di un poligono regolare inscritto in un cerchio, esso, allargandosi, si avvicinava sempre di più ai "confini" della circonferenza e quindi al cerchio.



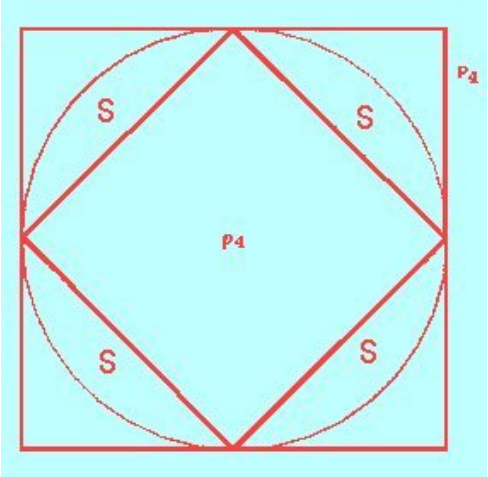
La stessa cosa accadeva utilizzando un poligono regolare circoscritto ad un cerchio: esso, stringendosi sempre più attorno ai "confini" della circonferenza, diventava progressivamente sempre più prossimo al cerchio inscritto.

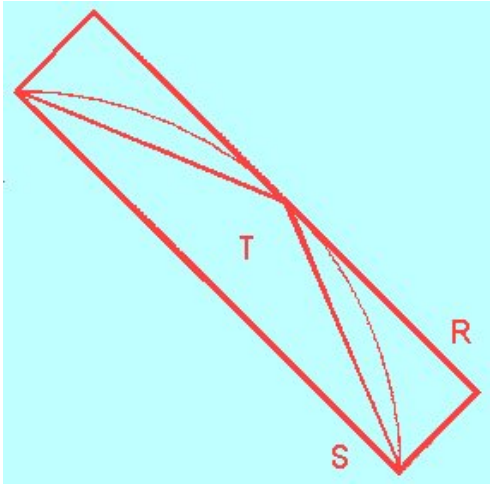


Ora, poiché i poligoni regolari «approssimano» i cerchi, la proprietà precedente relativa all'area dei poligoni regolari e al diametro della circonferenza circoscritta, avrebbe dovuto essere valida anche per questi ultimi, ma per poter formalizzare il ragionamento è necessario specificare il concetto di "approssimazione".

Tale concetto, in questo caso relativo alle superfici di figure piane, sia per gli antichi Greci che per noi, significa che, ***fissata una grandezza piccola quanto si vuole***, si potrà trovare un poligono *P,* inscritto nel cerchio *C,* tale che la differenza ***C - P*** risulti ***più piccola della grandezza fissata inizialmente***. In altre parole, è possibile rendere la differenza tra l'area del cerchio e l'area del poligono in essa inscritto, infinitamente piccola.

Il problema fu risolto da Eudosso, che ideò un modo per affrontare caso per caso questi problemi di approssimazione.





Si consideri un cerchio C, il quadrato inscritto p_4 e il quadrato circoscritto P_4. Poiché il quadrato inscritto è la metà di quello circoscritto P_4 si avrà

$$2p_4 = P_4$$

e poiché

$$2p_4 = P_4 > C$$

allora

$$p_4 > C/2$$

La differenza $C\text{-}p_4$, ossia ciò che resta del cerchio dopo aver tolto il quadrato inscritto, corrisponde ai quattro segmenti circolari che si possono indicare con S.

Bisecato l'arco di uno di tali segmenti, si costruisce il triangolo T inscritto in *S* e il rettangolo *R* circoscritto a *S*.

Di nuovo, siccome

$$2T = R > S.$$

si avrà che

$$T > S/2.$$

Se questo ragionamento si ripete per ciascuno dei quattro segmenti circolari, rimasti dalla differenza $C - p_4$, è possibile affermare che se si tolgono dai quattro segmenti i quattro triangoli inscritti come detto, si toglie di nuovo più della metà della superficie rimasta. Ripetendo la costruzione sugli otto segmenti circolari più piccoli che rimangono, si potrà costruire il poligono regolare di 16 lati inscritto nel cerchio, poi quello di 32, e così via,rendendo sempre più piccola la differenza $C\text{-}p_4$.

Eudosso deve aver visto in questo procedimento la possibilità di dimostrare che i poligoni regolari approssimano il cerchio.

In altre parole: date due grandezze *A* e *B,* se $A > B$ e si toglie dalla maggiore una quantità superiore alla sua metà, e poi, da ciò che resta, una quantità maggiore della metà e via dicendo, si deve arrivare a un resto che sia più piccolo di *B*. Se ciò è vero, dato il cerchio *C* e assegnata una qualunque grandezza *K,* si potrà costruire un poligono di 2^n lati tale che $C - P_{2^n} < K$.

Quanto detto corrisponde all'enunciato della proposizione 1.X degli *Elementi* di Euclide, la cui dimostrazione si fonda sul principio (che negli *Elementi* è una delle definizioni del V libro) che afferma: «Si dice che due grandezze dello stesso genere hanno rapporto fra loro se, moltiplicate, si superano a vicenda».

D) Se si assume di poter dimostrare che i poligoni approssimano il cerchio nel senso specificato nel punto precedente, si può effettivamente dimostrare per assurdo che:

i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei rispettivi diametri, cioè

$$C_1 : C_2 = d_1^2 : d_2^2$$

Tale dimostrazione segue il procedimento per assurdo, pertanto si nega la tesi e si afferma che, se cosi non fosse, ossia se non è vero che sono i due cerchi ad essere in rapporto con il quadrato dei raggi, dovrà esistere un'altra grandezza *S,* diversa dai due cerchi, per cui valga la proporzione precedente, cioè

$$\boldsymbol{S : C_2 = d_1^2 : d_2^2}$$

Se S deve essere diversa da C_1, sarà o maggiore o minore di C_1.

Supponendo di considerare il caso in cui ***S sia minore***, si prende la grandezza $C_1 - S$ e si determina un poligono regolare P_1, inscritto nel cerchio C_1, tale che $C_1 - P_1 < C_1 - S$. Ciò implica che P_1 dovrà essere maggiore di S.

Si costruisce ora un poligono regolare P_2 inscritto nel cerchio C_2 che abbia lo stesso numero di lati di P_1. Siccome i poligoni regolari di ugual numero di lati stanno fra loro come i quadrati dei raggi (Euclide lo dimostra nella 1.XII), si avrà che

$$P_1 : P_2 = \boldsymbol{d_1^2 : d_2^2}$$

Ma, per ipotesi,

$$\boldsymbol{d_1^2 : d_2^2} = S : C_2,$$

quindi

$$P_1 : P_2 = S : C_2$$

ovvero, permutando i medi,

$$P_1 : S = P_2 : C_2.$$

Ora, poiché P_2 è minore di C_2, perché inscritto in quest'ultimo, anche **P_1 dovrà essere minore di *S***. Il che è assurdo perché doveva essere $S < P_1$.

Quanto descritto è sostanzialmente la parte centrale della proposizione 2.XII degli *Elementi,* la cui invenzione viene attribuita ad Eudosso. Il caso in cui la grandezza S è maggiore di C_1, viene trattato riconducendosi a questa situazione.

Le tecniche impiegate in questa dimostrazione furono il punto di partenza della ricerca di Archimede nel campo della geometria di misura. È proprio Archimede, infatti, ad attribuire ad Eudosso quanto meno l'uso di principi e procedure simili a quelli qui descritti, riprendendoli dal testo degli *Elementi.* Eudosso (o i suoi immediati successori, Euclide compreso) aveva messo a punto una procedura più o meno standard per affrontare il difficile problema dei confronti fra figure nel caso in cui fossero in gioco figure curvilinee.

Questi erano, verso la metà del III secolo, i principali risultati che la geometria di misura era riuscita ad ottenere.

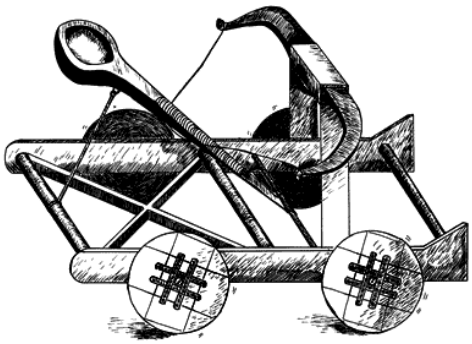
π visto da Archimede

«Datemi un punto d'appoggio e vi solleverò il mondo».

Archimede è considerato da molti il più grande genio dell'antichità, paragonabile a Newton sia per la versatilità della mente sia per l'importanza dei contributi dati alla scienza.

Insigne matematico, fisico ed inventore di grandissima genialità, figlio dell'astronomo Fidia, nacque a Siracusa nel 287 a.C. e compì ad Alessandria, con i discepoli di Euclide, studi che ebbero grande importanza nella storia della scienza. È diventato famoso soprattutto per le sue scoperte in idrostatica, scienza che studia l'equilibrio dei fluidi, e per le teorie e le invenzioni elaborate nel campo della meccanica, quali la teoria della leva, la vite senza fine, la carrucola mobile e le ruote dentate; indimenticabili, poi, i suoi studi in geometria.

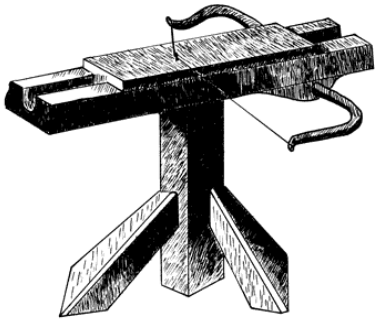
Plutarco, nella sua *Vita degli uomini illustri,* fornisce la data della morte di Archimede: 212 a.C.. Secondo il racconto dello storico, nel quale il protagonista era non tanto Archimede quanto il console Marcello, durante la seconda guerra punica che contrappose Roma a Cartagine, la flotta romana assediò per due anni Siracusa, alleata di Cartagine, senza riuscire ad espugnarla.



La catapulta (disegno di V.Pinna)

Fu in questa occasione che Archimede si trasformò in inventore d'armi. Egli riuscì a costruire macchine militarmente perfette per ordine di Gerone. Fra queste le più importanti furono:

- catapulte in grado di lanciare pietre contro navi anche piuttosto lontane;
- uncini di ferro capaci di agganciare le navi nemiche;
- massi che, mediante il sistema della leva, venivano spinti dalla cima delle colline e cadevano sugli invasori;
- feritoie dalle quali partivano frecce;
- specchi di bronzo (i cosiddetti "specchi ustori") che, concentrando i raggi del sole, bruciavano a distanza (ma forse è una leggenda) le navi nemiche.



La balista (disegno di V.Pinna)

Visto inutile l'attacco frontale, Marcello agì d'astuzia: finse di battere in ritirata e, impadronitosi di Megara, assalì Siracusa alle spalle, cogliendola del tutto impreparata. Durante il saccheggio della città, un soldato romano, entrato nella dimora di Archimede, lo trucidò. Si racconta che lo scienziato, tutto preso dalle sue riflessioni, in quel momento fosse al chino al suolo, sulla polvere del quale aveva tracciato una figura; il soldato avrebbe calpestato il disegno provocando la sua adirata reazione: «noli turbare meos circulos! (non cancellare i miei cerchi!)». Il soldato reagì alla poco rispettosa reazione dell'anziano scienziato uccidendolo; gesto del quale, secondo Plutarco, molto si rammaricò Marcello, i cui ordini sarebbero stati di risparmiare il pensatore. Il comandante delle truppe romane, infatti, era un grande ammiratore di Archimede e aveva ordinato che venisse risparmiata la vita allo scienziato che, con le sue formidabili invenzioni, aveva quasi completamente distrutto la sua flotta. Il console Marcello, come perenne tributo alla mente prodigiosa di Archimede, gli fece erigere una tomba sulla quale,

secondo il volere dello stesso scienziato, venne posta una sfera inscritta in un cilindro con i numeri che regolano i rapporti fra questi due solidi.

Di questo fatto rimane anche una testimonianza da parte di Marco Tullio Cicerone, che nelle sue Tusculanae Disputationes, V – 23, narra: "Quando ero questore in Sicilia mi misi a cercare la sua tomba invasa dalle erbe e dagli sterpi, che i Siracusani non conoscevano e anzi negavano che esistesse.

Avevo infatti sentito parlare di alcuni versi incisi sulla tomba che spiegavano perché essa fosse sormontata da una sfera e da un cilindro. Fuori da Porta Agrigentina c'è un gran numero di sepolture, e a forza di cercare e di guardare notai finalmente una piccola colonna che a pena superava la boscaglia di sterpi, e su di essa erano raffigurati una sfera e un cilindro. Dissi subito ai nobili siracusani che erano con me che probabilmente avevo trovato quello che stavo cercando: ci facemmo fare strada da un buon numero di gente munita di falci.. Sgombrato così il campo, arrivammo alla base del monumento; si vedeva ancora l'epigramma, anche se la seconda metà dei versi era corrosa".

Poiché Archimede aveva allora dai 70 ai 75 anni, la sua nascita si colloca fra il 282 ed il 287 a.C.

In età giovanile egli avrebbe studiato ad Alessandria d'Egitto ed è comunque certo che si tenne costantemente in contatto con i pensatori alessandrini; in particolare, con Ì matematici Conone ed Eratostene.

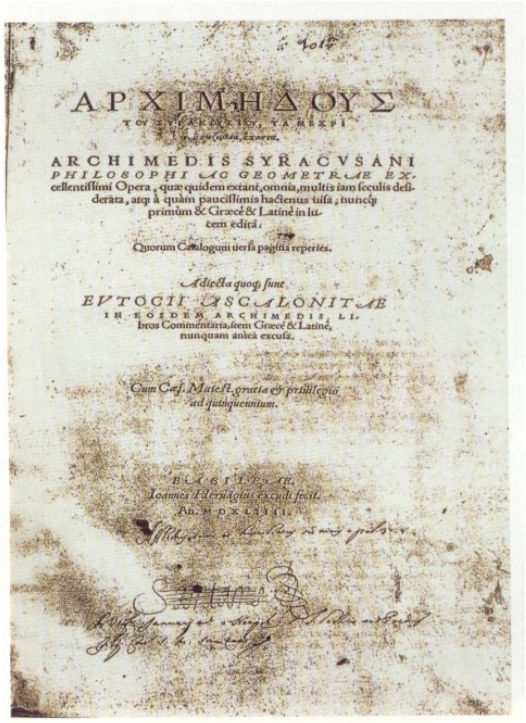

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ARCHIMEDIS SYRACVSANI
PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX-
cellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desideràta, atq à quàm paucissimis hactenus visa; nunc q primùm & Græcè & Latinè in lucem editá.
Quorum Catalogum uersa pagina reperies.
Adiecta quoq; sunt
EVTOCII ASCALONITAE
IN EOSDEM ARCHIMEDIS, LI-
bros Commentaria, tem Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.
Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.
BASILEAE,
Ioannes Hervagius excudit fecit.
AN. MDXLIIII.

Figura 1 Frontespizio dell'editio princeps greco-latina delle opere di Archimede, pubblicata a Basilea nel 1544

Di Archimede, tra varie vicissitudini, ci sono pervenute diverse preziose opere.

1. ***Sulla sfera e il cilindro***. Opera in due libri diretta a Dositeo, matematico di Alessandria, a cui Archimede indirizzò diversi altri scritti. Nel primo libro Archimede dimostra che la sfera è i 2/3 del cilindro ad essa circoscritto, la cui costruzione egli volle fosse scolpita sulla lapide della sua tomba, e che la superficie sferica è uguale a quattro cerchi massimi. Nel secondo tratta di problemi risolubili a partire da questi risultati: ad esempio, dividere una sfera in due segmenti che abbiano fra loro un rapporto dato.

2. ***Misura del cerchio***. Consiste di sole tre proposizioni. Nella prima si dimostra che il cerchio è uguale al triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza rettificata. Nella terza si dimostra che il rapporto fra la circonferenza e il diametro deve essere compreso fra 3 +10/71 e 3 + 1 /7.

3. ***Sui conoidi e sferoidi***. Studia le figure che oggi si chiamano paraboloide e iperboloide di rivoluzione (conoidi) ed ellissoidi (sferoidi).

4. *Sulle spirali*. È qui definita la "*spirale di Archimede*": curva descritta da un punto che si muove di moto uniforme su una semiretta, la quale, a sua volta, si muove di moto circolare uniforme attorno alla propria origine.

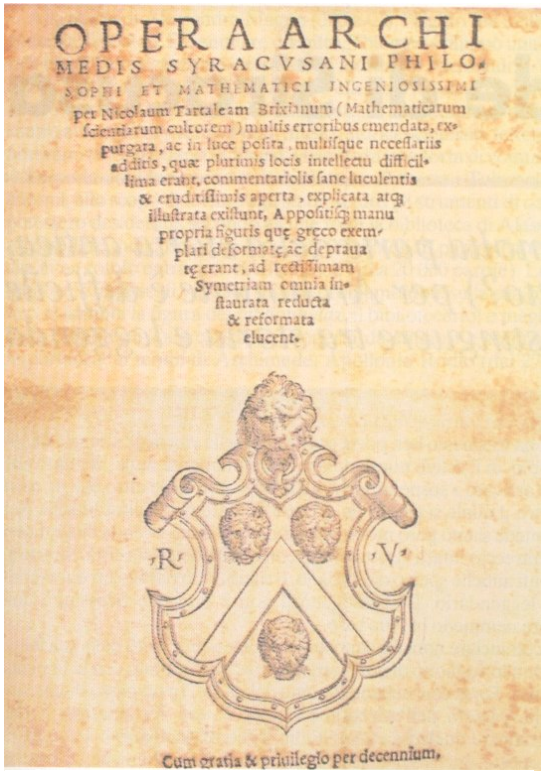

OPERA ARCHI
MEDIS SYRACVSANI PHILO-
SOPHI ET MATHEMATICI INGENIOSISSIMI
per Nicolaum Tartaleam Brixianum (Mathematicarum
scientiarum cultorem) multis erroribus emendata, ex-
purgata, ac in luce posita, multisque necessariis
additis, quæ plurimis locis intellectu difficil-
lima erant, commentariolis sane luculentis
& eruditissimis aperta, explicata atq;
illustrata existunt, Appositisq; manu
propria figuris quę græco exem-
plari deformatę, ac depraua
tę erant, ad rectissimam
Symetriam omnia in-
staurata reducta
& reformata
elucent.
R
V
Cum gratia & priuilegio per decennium.

Figura 2 Le Opera Archimedis, a cura di Nicolò Tartaglia, pubblicate nel 1543.

5. *Sull'equilibrio dei piani*, in due libri. Nel primo libro viene dedotta la legge della leva e viene determinato il centro di gravità di alcune figure piane: parallelogramma, triangolo, trapezio. Il secondo è interamente dedicato alla determinazione del centro di gravità del segmento di parabola.

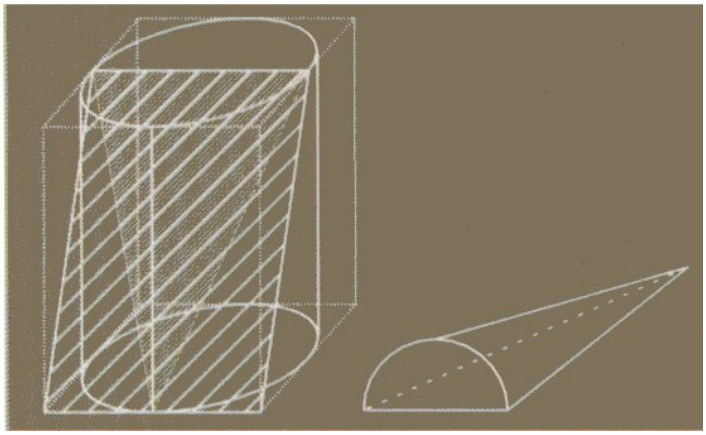
6. ***Arenario***. Dedicato al re Gelone di Siracusa. Vi si presenta un sistema di numerazione in grado di contare numeri grandissimi: quale il numero di granelli di sabbia contenuti in una sfera grande quanto l'universo.

7. *Quadratura della parabola*. Si dimostra che la parabola è i 4/3 del triangolo avente uguale base e uguale altezza.

8. *Sui galleggianti*, in due libri. Nel primo libro si enuncia il «principio di Archimede»: un corpo immerso in un liquido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di liquido spostato. Su questa base, alla fine del primo libro, vengono determinate le condizioni di equilibrio di un segmento sferico galleggiante; il secondo libro è dedicato allo studio del comportamento di un paraboloide galleggiante.

9. ***Stomachion***. Operetta curiosa, in cui viene descritto una sorta di *tangram:* si tratta di suddividere un quadrato o un rettangolo in quattordici parti che siano fra loro commensurabili.

10. Sul metodo meccanico. Quest'opera è dedicata ad Eratostene. Archimede vi rivela il metodo euristico che seguiva per ottenere i risultati dei suoi studi, attraverso l'illustrazione di numerosi esempi che mostrano come applicarlo (quadratura della parabola, sfera, segmenti sferici, conoidi e sferoidi). L'opera è tuttavia mirata principalmente allo studio della cosiddetta «unghia cilindrica» e del solido che si ottiene intersecando due cilindri inscritti in un cubo.



La costruzione dell'unghia cilindrica si ottiene considerando un prisma retto a basi quadrate in cui è inscritto un cilindro. Il solido viene poi sezionato con un piano che passi per il centro del cerchio di una delle basi del cilindro e per uno dei lati del quadrato che costituisce la faccia opposta del prisma.

11. ***Libro dei lemmi***. Pervenutoci solo attraverso una parafrasi araba, tratta di figure come l'*arbelon* o il *salinon*, ottenibili per mezzo di intersezioni di cerchi.

12. ***Il problema dei buoi***. Operetta brevissima in cui Archimede sfida i matematici del suo tempo a risolvere un problema di aritmetica: contare il numero dei buoi - bianchi, pezzati, neri e fulvi - che il dio Sole pascolava nella Trinacria, note certe relazioni fra il numero di buoi di ogni singolo colore. Il problema conduce ad un'equazione le cui soluzioni sono numeri decisamente mostruosi, con più di 200 000 cifre. Non è noto come Archimede abbia potuto pervenire alla soluzione.

Vero genio della Meccanica pura ed applicata, Archimede considerò l'attività puramente intellettuale come l'unica effettivamente degna di considerazione, anche se, mentre disdegnò le *applicazioni manuali*, tenne in gran conto le *applicazioni* delle teorie in studio.

Per questa sua particolare visione della scienza, Archimede si discostò profondamente da Euclide, il quale, molto influenzato dalle idee di Platone e forse anche dai pregiudizi di una società in cui si pensava che i calcoli (la logistica) dovessero essere lasciati agli schiavi, aveva concepito la geometria come un'architettura totalmente astratta: del tutto svincolata, cioè, da quelle *applicazioni* che allora sembravano ragionamenti di rango inferiore, indegni di attenzione. Tanto è vero che nei suoi *Elementi*, alla raffinata dimostrazione del teorema "*due cerchi stanno come i quadrati costruiti sui rispettivi diametri*" (per cui si otteneva: area cerchio = πr^2*),* non segue né una ricerca del valore di π , né, addirittura, una qualsiasi menzione di tale costante.

Figura 3 Trattato "Sulla misura del cerchio"

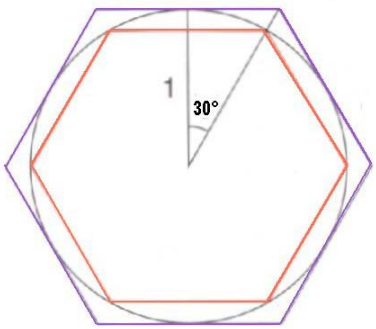
Archimede ebbe il merito di non uniformarsi a questo aspetto del pensiero platonico che rischiava di limitare il campo d'azione della ricerca matematica. Si dedicò, dunque, con impegno sia alla matematica pura che alla matematica applicata.

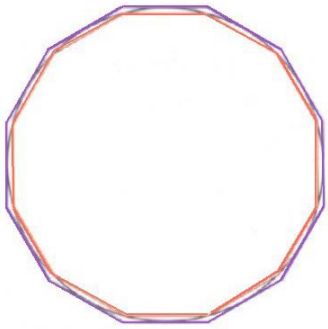
Tra i tanti risultati cui egli pervenne c'è anche un valore approssimato di $\boldsymbol{\pi}$, a cui arrivò utilizzando i metodi di esaustione di Antifonte e Brisone. Archimede, però, si concentrò sui perimetri dei due poligoni anziché sulle loro aree, trovando così un'approssimazione alla circonferenza del cerchio.

Considerando $\boldsymbol{\pi}$ come rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, egli esaminò i poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza di 6, 12, 24, 48, 96 lati.

Il procedimento da lui adottato, detto dei *perimetri,* è concettualmente assai semplice, anche se comporta calcoli piuttosto laboriosi. Se *p* rappresenta i perimetri dei poligoni inscritti in una circonferenza, *c* la lunghezza della circonferenza e *P* i perimetri dei poligoni circoscritti, si possono scrivere le seguenti disuguaglianze

$$\mathbf{p < c < P.}$$





Se dalle disuguaglianze fra grandezze si passa a quelle fra le corrispondenti misure rispetto al diametro 2r, si ottiene:

$$\frac{p}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{P}{2r} \quad cioé \quad \frac{p}{2r} < \pi < \frac{P}{2r}$$

All'aumentare del numero *n* dei lati dei poligoni regolari presi in considerazione, i due numeri

$$p/2r \quad \text{e} \quad P/2r$$

approssimano sempre meglio π (l'uno per difetto e l'altro per eccesso). Per valutare il grado di approssimazione raggiunta basta calcolare la differenza

$$d = \frac{p}{2r} - \frac{P}{2r}.$$

Se, ad esempio, si trova che d =0,003..., allora possiamo concludere che p/2r e P/2r approssimano π a meno di 4 millesimi.

Archimede considerò dapprima gli esagoni regolari rispettivamente inscritti e circoscritti alla circonferenza e, raddoppiando successivamente il numero *n* dei lati fino a 96, determinò i perimetri di questi poligoni deducendone che

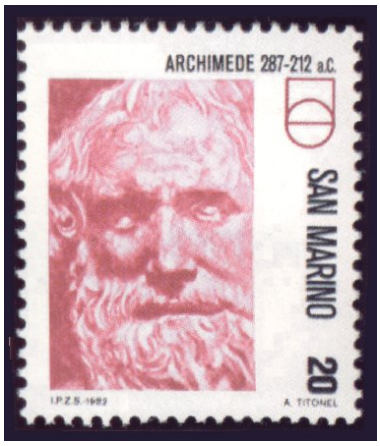
$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

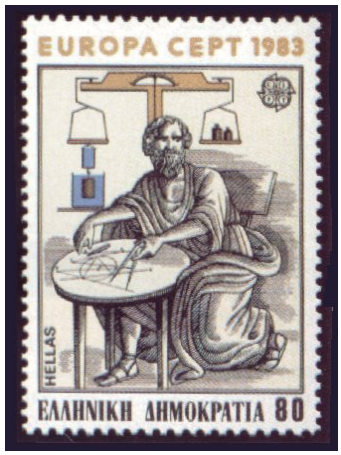
Si noti che 3 + 1/7 = 22/7 = 3,1428... è un valore che differisce per eccesso da π di meno di due millesimi e venne costantemente usato nei calcoli durante tutto il Medioevo.

Archimede sapeva di poter descrivere solo i limiti superiore ed inferiore del rapporto, ma se si fa una media dei due valori si ottiene 3,1419…

Egli rese pubbliche le sue scoperte, come si è detto, nel libro "Misura del cerchio".

L'importanza storica di Archimede per lo sviluppo delle scienze è dimostrato dal tributo che ancora oggi la civiltà moderna vuole riconoscergli attraverso l'emissione di francobolli commemorativi.





I Romani

Originariamente un modesto villaggio di pastori e di contadini sorto in vicinanza del mare lungo le rive del Tevere, Roma intrecciò ben presto la propria storia con quella del mondo. Nella storia romana si individuano alcuni periodi fondamentali: *IL PERIODO MONARCHICO: (753 – 509 a.C.)*, durante il quale, secondo la tradizione, si succedettero, dopo Romolo, sette re; *LA REPUBBLICA ROMANA: 509 – 27 a.C.*, caratterizzata dall'espansione nel Mediterraneo; *L'IMPERO ROMANO: 27 a.C. – 476 d.C.* che nel periodo compreso tra il 98 al 117 d.C. raggiunge la sua massima estensione. A causa, però, degli importanti e profondi cambiamenti nati al suo interno e dalle pericolose forze esterne rappresentate dai "barbari", alla fine del IV secolo d.C. l'impero si divide in due parti: l'Impero romano di Occidente con capitale Ravenna e l'Impero romano d'Oriente con capitale Bisanzio.

Dopo la destituzione dell'ultimo imperatore Romolo Augustolo, nel 476 d.C.cade l'Impero romano d'Occidente: termina il periodo storico detto ***Evo Antico*** e ha inizio il ***Medioevo***. L'Impero romano d'Oriente sopravvivrà ancora per circa altri mille anni, sino al 1453, quando la capitale Bisanzio cadrà per opera dei Turchi.

I Romani acquisirono le conoscenze scientifiche dei Greci ma, in accordo con il carattere meno propenso di quello greco all'astrazione e alla speculazione, essi approfondirono ed esaltarono gli aspetti pratici e tecnici.

Al culmine del loro impero (27 a.C. – 476 d.C.), i Romani usarono spesso per π il valore di **3+1/8**, anche se sapevano perfettamente che **3+1/7** era più esatto.

Un trattato romano di agrimensura contiene le istruzioni per la quadratura del cerchio: "Dividi la circonferenza di un cerchio in quattro parti e prendine una come lato di un quadrato; questo quadrato avrà l'area uguale al cerchio". Ciò implica che $\pi = 4$.

Infatti

$$C = 2\,\pi\,r$$

$$l = \frac{2\pi r}{4} = \frac{1}{2}\pi\, r$$

Con r = 1 risulta:

$$l = \frac{1}{2}\pi$$

Se un quadrato avesse un lato di tale misura, la sua area sarebbe

$$l^2 = \frac{1}{4}\pi^2$$

Confrontando l'area di questo quadrato con quella del cerchio di raggio 1, che doveva essere ad esso equivalente, quindi con

$$A = \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{r} = \boldsymbol{\pi}$$

si ha:

$$\pi = \frac{1}{4}\pi^2$$

$$1 = \frac{1}{4}\pi$$

$$\pi = 4$$

I Cinesi

La civiltà cinese, come le altre grandi civiltà antiche, si sviluppò lungo i bacini di due importanti corsi d'acqua: dapprima, già dal IV millennio a.C., nel nord del paese, lungo le rive del Fiume Giallo, poi a sud, intorno al I millennio a.C., lungo il Fiume Azzurro.

La civiltà cinese nacque dalle comunità villaggio di un grande mondo contadino che sviluppò le iniziali forme di stato a partire dal II millennio a.C.

Verso il III secolo a.C., il paese risultava diviso in tanti piccoli regni rivali, in continua lotta reciproca per il predominio: la Cina visse allora il periodo noto come l'epoca dei *regni combattenti*.

La lunga crisi terminò nel 221 a.C. quando il giovane principe Ch'in Shih Huang-ti, da cui la Cina prende il nome, riunendo le regioni del suo paese e attribuendosi il titolo di ***Grande Unificatore***, proclamò l'impero. Ch'in morì nel 207 a.C. ma costruì un modello di impero centralizzato che venne poi perfezionato dalle dinastie successive e, sia pure con alterne vicende relative alle capacità dei governanti, durò per venti secoli.

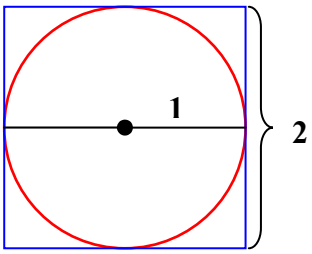
La civiltà cinese, come l'indiana, non si è estinta al pari delle altre antiche culture: dalla sua nascita ha attraversato i millenni, evolvendosi con continuità sino ai giorni nostri e abbracciando un periodo di quasi 5000 anni.

La matematica cinese, però, non ha potuto contare su un progresso continuativo: se ciò fosse avvenuto, infatti, molte importanti conquiste intellettuali avrebbero potuto precorrere metodi moderni; fatto accaduto in vari ambiti culturali dove, con notevole anticipo rispetto alle altre civiltà, si è avuta ad esempio la scoperta della polvere da sparo o la fabbricazione della carta.

La cultura cinese fu segnata, infatti, da improvvise interruzioni, quale ad esempio quella che si ebbe intorno al 213 a.C., quando per ordine dell'imperatore regnante vennero bruciati tutti i libri. Nonostante questo fatto, qualche testo dovette sicuramente sopravvivere, o attraverso la riproduzione di copie o tramite la trasmissione orale, e anche la matematica continuò ad avanzare con nuove conoscenze, soprattutto in ambito commerciale e nel computo del tempo.

La Cina fu, quindi, una fra le più antiche civiltà scientifiche e matematiche ma, nonostante già nel XII secolo a.C. la matematica cinese avesse raggiunto buoni livelli, i cinesi continuavano ad usare nei loro calcoli il valore di $\boldsymbol{\pi}$ =3.

La civiltà cinese progredì notevolmente nella misurazione del cerchio circa un millennio dopo. Ch'ang Hong, ministro e astrologo dell'imperatore An-ti nella prima metà del II secolo d.C., nel 139, scrisse che il quadrato della circonferenza di un cerchio sta al quadrato del perimetro del quadrato circoscritto come 5 sta a 8. Usando un cerchio con **raggio** pari a 1, si ha



$C = 2\pi r$ lato $_{\text{quadrato circoscritto}} = 2r = 2$

$C = 2\pi$ perimetro $_{\text{quadrato circoscritto}} = 8$

$C^2 = 4\pi^2$ $p^2 = 64$

Da cui, sostituendo nella proporzione

$$C^2 : p^2 = 5 : 8$$

si ha:

$$4\pi^2 : 64 = 5 : 8$$

$$\pi^2 : 16 = 5 : 8$$
$$\pi^2 . 8 = 16 . 5$$
$$\pi = \sqrt{10}$$

Tale valore corrisponde circa a 3,162. Pur essendo inesatto, il valore $\sqrt{10}$ restò per molto tempo l'approssimazione più popolare di π in tutta l'Asia.

Wang Fau (229-267) adottava per π il valore di 3,156.

Liu Hui, nel 263, usando il metodo di esaustione con un poligono di 3072 lati, trovò per π il valore di 3,1416.

L'astronomo del V secolo Tsu Ch'ung-Chih, usando poligoni inscritti di circa 24.000 lati, dedusse che π valeva approssimativamente 355/113, ossia circa 3,1415929. Questo valore, straordinariamente prossimo al valore oggi accettato di 3,141592653589…e rappresenta una precisione che in Europa sarà raggiunta solo nel XVI secolo.

Sembra che tali risultati siano stati raggiunti soprattutto grazie all'uso del sistema posizionale in base dieci che permetteva calcoli più semplici e veloci.

Gli Arabi

Lo sviluppo della matematica araba conobbe il suo più fiorente periodo negli anni che vanno dal 750 al 1400. Completata la conquista di territori che si estendevano dall'India alla Spagna, gli Arabi si dedicarono allo sviluppo civile e culturale della loro società, evidenziando rapidamente un crescente interesse per le arti e le scienze. Le risorse culturali che essi ebbero a disposizione erano considerevoli, in quanto quasi tutte le opere greche caddero nelle loro mani. Gli studiosi, quindi, s'impadronirono della cultura greca e indiana e le fecero proprie. Tra l'IX e il XV secolo, infatti, essi non furono semplici traduttori degli scritti di matematica greca, ma, come dimostrano studi recenti, elaborarono molte parti della matematica che poi ricomparvero in Europa tra il Cinquecento e il Settecento.

La base per gli sviluppi originali della matematica del mondo arabo fu posta sotto il quinto califfo che, iniziato il suo regno nel 786 a Damasco, promosse la nascita di scuole, la diffusione delle conoscenze matematiche degli Indiani e la traduzione dei testi scientifici greci: è nel corso del suo regno che vennero tradotti gli *Elementi* di Euclide. Suo figlio rese la città di Baghdad, divenuta capitale del regno, non solo la sede dell'opera di traduzione ma anche il più rinomato centro scientifico mondiale.

Per secoli il bacino del Mediterraneo fu conteso tra due civiltà: la cristiana e l'islamica. L'occupazione araba della Spagna durò circa sette secoli. Da qui i guerrieri dell'Islam puntarono verso la Francia spingendosi fino a Lione, ma nel 732 si scontrarono con l'esercito di Carlo Martello che li fermò a Poitiers, battaglia che venne assunta come simbolo dell'arresto dell'espansione araba nell'Occidente.

Il collasso culturale del mondo islamico fu ancor più completo della disintegrazione politica dell'impero musulmano e fu una circostanza veramente fortunata il fatto che, quando la cultura araba cominciava a declinare, la cultura europea fosse in fase di ascesa e si dimostrasse pronta ad accogliere l'eredità spirituale dell'età precedente.

Nell'IX secolo, nei territori dell'attuale Irak, viveva e insegnava uno dei più grandi matematici del Medio Oriente, Abu 'Abd-Allah ibn Musa al-Khwarizmi. Egli, nelle sue opere, usò per π i valori di 3 + 1/7, $\sqrt{10}$ e 62.832/20.000, attribuendo il primo ai greci e gli altri due a matematici indiani. Va anche ricordato che, nei suoi scritti, usò le cifre indiane, successivamente note anche come arabe, compresi lo zero e la virgola dei decimali.

Al Kashi, attivo intorno al 1430 d.C., usava invece il valore 3, 1415926535898732

L'Europa

Nel Medioevo

Dopo Archimede, in Occidente, non venne raggiunto nessun nuovo progresso nel calcolo di π, anche a causa della lenta adozione dello straordinario ed efficiente sistema di numerazione a base decimale; inoltre, solo all'inizio del XII secolo, Adelardo di Bath tradusse in latino gli Elementi di Euclide, l'Almagesto di Tolomeo, le opere di al-Khwarizmi e introdusse nell'Occidente i numeri arabi e la relativa notazione.

Diversi furono gli interessanti tentativi di calcolare il valore di π.

- Nel 1220, Leonardo Pisano, detto Fibonacci (1180 – 1250) calcola l'approssimazione di π in 3,141818.
- Nel 1573, in Germania, Valentino Otho ritrova il valore 355/113, già ottenuto in Cina nel V secolo.
- Intorno al 1539 – 1610, il professore di matematica dell'Università di Leida, nei Paesi Bassi, Ludolph von Ceulen, utilizzando il metodo di Archimede, quindi di oltre mille anni prima, calcolò il valore di π con 34 decimali e chiese che tali decimali fossero impressi sulla sua tomba. In Germania, in onore del traguardo raggiunto, π è anche chiamato *numero di Ludolph*.
- A Parigi Fraçois Viète, detto Vièta (1540 - 1603), partendo da considerazioni geometriche elementari sulla superficie di un poligono di 2^n lati inscritto in una circonferenza, scrive la prima formula di infiniti termini per determinare il valore di π.

Nel Seicento, nel Settecento e nell'Ottocento

- Nel 1621, l'olandese Wikkebrod Snellius (1580 – 1626) tenta di approssimare un arco di circonferenza per eccesso e per difetto con segmenti di retta. La sua formula, che sarà dimostrata solo il secolo successivo da Christian Huygens (1629 – 1693), risulta molto efficace in quanto con una suddivisione della circonferenza in sei archi ottiene il risultato avuto da Archimede con un poligono di 96 lati.

La nascita dell'analisi moderna permette la scoperta di nuove definizioni di π, che si svincolano dalla geometria per rivolgersi alla pura aritmetica. Vengono così scoperte nuove formule che legano π ai numeri interi, a volte anche con espressioni che nella loro eleganza sembrano semplici, ma che nella realtà coinvolgono i concetti dell'analisi matematica e le somme di infiniti termini, ossia di quegli enti matematici chiamati *serie*.

- John Wallis (1616 – 1703), grazie all'abilità dimostrata nel decifrare lettere segrete durante la guerra civile, venne nominato professore ad Oxford, nel 1649. Egli partecipò alla fondazione della Royal Society e a lui si devono molti contributi alla matematica moderna, tra i quali i simboli ">" e "<" utilizzati nel confronto tra numeri e il simbolo "∞" per indicare i numeri infinitamente grandi. Considerato uno dei maggiori precursori di Newton, Wallis riuscì a scoprire un'elegante formula per il calcolo di **π,** costituita da prodotti infiniti che non coinvolge radicali e che è data dalla seguente espressione:

$$\pi = 2 * \frac{2}{1} * \frac{2}{3} * \frac{4}{3} * \frac{4}{5} * \frac{6}{5} * \frac{6}{7} * \ldots \frac{2n}{2n-1} * \frac{2n}{2n+1}$$

Egli visse nel periodo in cui i grandi problemi dell'antichità attiravano l'attenzione del mondo intero: oltre a famosi cervelli matematici, erano impegnati in questa ricerca, all'apparenza abbastanza semplice, anche appassionati, ambiziosi, megalomani e…perditempo!!

Wallis, pertanto, divenne famoso anche per una curiosa disputa nata quando dimostrò che era falsa la soluzione al problema della quadratura del cerchio presentata, intorno al 1665, dal filosofo inglese Tommaso Hobbes.

L'ossessione di risolvere la quadratura del cerchio prende il nome di *morbo ciclometrico.* Questa malattia, nel XVIII secolo, assunse tali proporzioni che l'Accademia delle Scienze di Parigi fu costretta ad intervenire con decisione, per arginare la mole di folli proposte che continuamente venivano sottoposte alla sua attenzione. Per giustificare la propria decisione, pubblicò il seguente testo:

Reale Accademia delle Scienze di Parigi, anno 1775

L'Accademia ha deciso, quest'anno, di non prendere più in esame alcuna soluzione dei problemi della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo, o della quadratura del cerchio, né alcuna macchina che pretenda di realizzare il moto perpetuo.

Riteniamo opportuno rendere conto dei motivi che hanno dettato questa decisione.

Il problema della duplicazione del cubo è stato sollevato dai Greci. La leggenda narra che l'oracolo di Delo, consultato dagli Ateniesi per far cessare la peste, ordinò di costruire al dio di Delo un altare a forma di cubo doppio di quello che si trovava nel suo tempio. [...]

Il problema della trisezione dell'angolo fu ugualmente affrontato dagli Antichi; inizialmente fu risolto mediante una costruzione che conteneva la descrizione di una curva di terzo grado. [...]

Tuttavia, poiché gli Antichi consideravano come geometriche le soluzioni in cui si usava solo la retta e il cerchio, la riga e il compasso, questa circostanza ha fatto nascere un pregiudizio, che regna ancora presso gli uomini meno illuminati; essi continuano a cercare soluzioni geometriche a questi problemi; alcuni, utilizzando solo riga e compasso, trovano soluzioni errate; altri ne trovano di esatte, ma, inconsapevolmente, utilizzano delle curve, e le loro soluzioni rientrano tra quelle già conosciute: ogni analisi è dunque inutile.

Il problema della quadratura del cerchio è diverso: la quadratura della parabola trovata da Archimede e quella delle lunule di Ippocrate di Chio ingenerarono la speranza di poter quadrare il cerchio, cioè di trovare la misura della sua superficie. Archimede dimostrò che questo problema, e quello della rettificazione della circonferenza, dipendevano l'uno dall'altro e da allora sono stati confusi.

Si conoscono solo metodi approssimati per quadrare il cerchio, il primo dei quali è dovuto ad Archimede; numerosi celebri Geometri ne hanno proposti dei nuovi, molto ingegnosi, molto semplici, molto comodi nell'applicazione pratica; è possibile perfezionare ancora questi metodi; l'Accademia non esclude questo genere di ricerca; ma non sono metodi approssimati quelli che intendono offrire coloro che si occupano della quadratura del cerchio, essi aspirano alla soluzione rigorosa del problema. [...] un'esperienza di più di settant'anni ha mostrato all'Accademia che nessuno di coloro che le inviavano soluzioni a questi problemi ne conosceva né la natura né le difficoltà, e che nessuno dei metodi che essi utilizzavano avrebbe potuto condurre alla soluzione, ammesso che questa fosse possibile. Questa lunga esperienza è bastata per convincere l'Accademia della scarsa utilità che avrebbe per le Scienze l'esame di tutte queste pretese soluzioni.

Altre considerazioni hanno convinto l'Accademia: esiste una diceria popolare secondo la quale i Governi hanno promesso notevoli ricompense a colui che riuscirà a risolvere il problema della quadratura del cerchio; prestando fede a questa diceria, una folla di persone rinuncia a utili occupazioni per lanciarsi alla ricerca di questo problema, spesso senza conoscerlo a fondo, e sempre senza avere le necessarie conoscenze per tentarne con successo la soluzione: niente era più indicato per disilluderli che la dichiarazione che l'Accademia ha giudicato di dover fare. Parecchi avevano la sfortuna di credere di essere riusciti nell'intento, e si rifiutavano di cedere alle ragioni con cui i Geometri confutavano le loro soluzioni, che spesso essi non capivano, e finivano per accusarli di invidia e di malafede. A volte la loro ostinazione è degenerata in una vera follia. Ogni attaccamento ostinato a un'opinione dimostrata falsa, se vi si aggiunge un lavoro interminabile allo stesso oggetto e una violenta insofferenza nei confronti della critica, è senz'altro una vera follia; ma non la si considera tale, se l'opinione che forma questa follia non urta contro le idee conosciute degli uomini, se non influisce sulla condotta di vita, se non turba l'ordine costituito e la società.

L'umanità esigeva dunque che l'Accademia, persuasa dell'assoluta inutilità dell'analisi delle soluzioni al problema della quadratura del cerchio, cercasse di distruggere, con una dichiarazione pubblica, opinioni popolari che sono state funeste a parecchie famiglie. [...] La quadratura del cerchio è il solo problema rigettato dall'Accademia, che possa dar luogo a ricerche utili, e se un Geometra dovesse arrivare a risolverlo, la delibera dell'Accademia non farebbe che aumentare la sua gloria, dimostrando quale opinione hanno i Geometri della difficoltà, per non dire dell'insolubilità del problema.

- William Brouncker (1620 – 1684) fu con Wallis uno dei fondatori della Royal Society. Egli utilizzò nelle sue formule quelle che si chiamano frazioni continue.

Una frazione continua è una successione di frazioni ordinarie, chiamate quozienti parziali, ciascuna delle quali è considerata come denominatore della frazione precedente, eventualmente con l'aggiunta di una costante. Essa è rappresentata mediante una formula del seguente tipo:

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{\cdots}}}}}$$

e così via giungendo ai generici termini a_n ed b_n.

Se in una frazione continua i b_i sono uguali a 1, si parla di *frazione continua regolare,* che risulta scritta in questo modo:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ldots}}}}}$$

Tale frazione, per risparmiare spazio nella scrittura, si può scrivere riportando solo gli elementi significativi su un'unica riga; essa assume pertanto il seguente aspetto:

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots]$$

Ad ogni numero è associata una frazione continua regolare ottenuta in varie tappe:

1) si scrive il numero decimale come somma di un intero e della sua parte decimale, che rappresenta un numero minore di uno, ad esempio:

$$4{,}14158 = 4 + 0{,}14158$$

2) si considera l'inverso della parte decimale, che essendo l'inverso di un numero minore dell'unità sarà maggiore di 1,

$$\frac{1}{0{,}14158} = 7{,}0631$$

3) considerando l'inverso di tale numero, quindi 1/7,0631, poiché tale scrittura significa $\dfrac{1}{\dfrac{1}{0{,}14158}}$, in realtà il numero è sempre quello di partenza ma scritto sotto un'altra forma.

4) Nella nuova frazione, il numero a denominatore, essendo come si è detto maggiore di uno, si scrive nuovamente come la somma della parte intera e della parte decimale, per quale si ripete il ragionamento precedente.

$$4{,}14158 = 4 + \frac{1}{7{,}0631} = 4 + \frac{1}{7 + 0{,}0631} = 4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15{,}84786}}$$

Le frazioni continue possono avere termine, quindi essere limitate, nel qual caso si ottiene una frazione ordinaria. Ogni frazione continua limitata ad elementi naturali può essere trasformata in un numero razionale, e viceversa: ogni numero razionale positivo può essere convertito in una frazione continua ad elementi naturali.

Una frazione continua che contiene infiniti termini si dice illimitata. Se la frazione continua deve rappresentare un numero irrazionale non si arriverà mai ad un b_n ed un a_n che definisca il numero, ma si andrà all'infinito.

Utilizzando questa forma di scrittura, Brouncker propose, per il calcolo di $\boldsymbol{\pi}$ la seguente formula:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{\ldots}{\ldots\ldots 2 + \cfrac{(2n+1)^2}{2 + \ldots\ldots}}}}}}$$

- John Machin (1680 – 1752), professore di astronomia a Londra, utilizzando una formula contenente una funzione di trigonometria detta arcotangente, introdotta per la prima volta da James Gregory (1638 – 1675), fu il primo matematico a calcolare, nel 1706, il valore di π con 100 decimali.

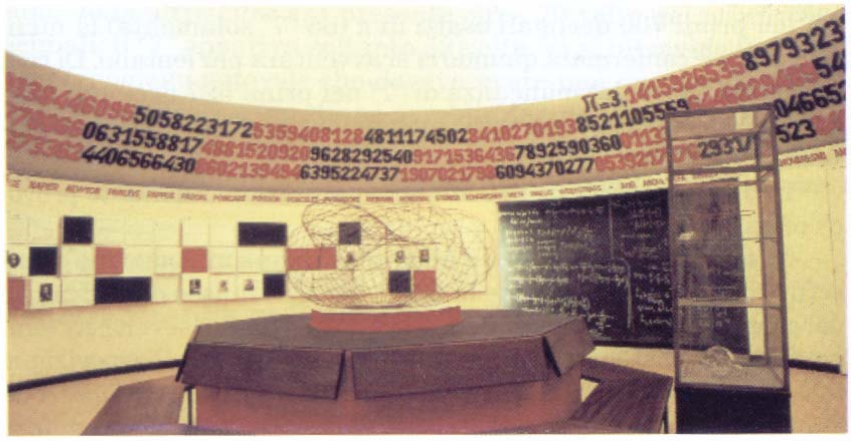
Altri grandi nomi della scienza si dedicarono allo studio di formule per la determinazione dei decimali di π, tra i quali René Descartes (Cartesio, 1596 – 1650), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), Isaac Newton (1642 – 1727) ed Eulero.

- Lehonard Euler (Eulero, 1707 – 1783) è da molti considerato il più grande matematico di tutti i tempi. Di eccezionali capacità mnemoniche e intellettive, egli ebbe una straordinaria produzione di opere scientifiche comprendente 75 volumi di 600 pagine ciascuno, senza considerare le lettere che scambiò con i più grandi matematici suoi contemporanei quali Bernoulli e Goldbach. Egli scoprì molteplici formule su π tra cui una, di grande semplicità ed eleganza, che è la seguente:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

- I primi anni dell'ottocento sono caratterizzati da un'agguerritissima gara a chi calcolava il maggior numero di decimali del sempre irraggiungibile π. I record si sprecavano e i primati raggiunti erano rapidamente superati, quando nel 1875 William Shanks (1812 – 1882) pubblicò, senza l'aiuto di alcuna macchina, il valore di π con 707 decimali, coronamento di 20 anni di calcoli! Il record di Shanks resistette fino al 1945, quando D. Ferguson ottenne 539 decimali di π, i quali, però, oltre la 528esima cifra non corrispondevano più a quelli di Shanks. Dopo un'accurata analisi del calcolo del suo predecessore, Ferguson suppose che l'errore fosse conseguenza dell'omissione di un termine nella formula utilizzata da Shanks. Il termine, dimenticato per 20 anni da Shanks nei suoi calcoli, avrebbe condotto ad un errore a partire dalla 528esima cifra decimale, ma da quel momento in poi egli avrebbe condotto i suoi calcoli senza alcuno sbaglio.

L'errore di Shanks è all'origine di un forma di sventura che pesa, ancora oggi, sul Palais de la Découverte di Parigi, costruito in occasione della grande Esposizione Universale del 1900. Al momento della sua sistemazione, avvenuta nel 1937, si decise di decorare la sala 31 del museo delle Scienze, sala rotonda detta "Sala π", incidendo sul soffitto i decimali di π sino ad allora conosciuti disposti lungo una spirale che si innalza verso il soffitto.



Per le incisioni si utilizzarono i decimali di π proposti da Shanks, scritti a gruppi di dieci in colore alternativamente rosso e nero. I responsabili del Palais de la Découverte corressero l'errore nel 1949, senza che di tale correzione si veda traccia, e, nello stesso anno, furono raggiunti i mille decimali per π.

Da quel momento in poi il testimone per il calcolo delle cifre decimali di π passò ai computer. Fino al 1973 i migliori metodi per il calcolo erano basati sulle serie, ma il progresso nella conquista di nuovi decimali, in corrispondenza dell'allungarsi dei numeri trovati, implicava calcoli con la moltiplicazione di numeri progressivamente più grandi, che quindi rallentavano sempre di più il raggiungimento di nuovi obiettivi. Da quest'anno in poi, la corsa alla conquista di nuove cifre decimali trovò un alleato nell'uso di nuove formule e di nuovi metodi per eseguire il prodotto di grandi numeri.

Queste formule sono basate sugli studi di uno dei più grandi geni matematici di tutti i tempi: l'indiano Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920), morto in Inghilterra all'età di 30 anni di tubercolosi. Fra le numerose formule da lui annotate sui suoi quaderni, alcune sono state dimostrate solo da poco tempo, mentre altre sono ancora in attesa di dimostrazione.

Le formule che egli propose per π sono meravigliose per l'efficienza del calcolo e strabilianti poiché, ancora oggi, non si comprende come Ramanujan avesse potuto immaginarle. Una di queste formule, illuminata come la fantastica mente che l'ha concepita, consente di ottenere otto nuovi decimali esatti per π ad ogni passaggio.

A distanza d i quasi ottant'anni, scienziati e matematici sono ancora impegnati a studiare le affascinanti equazioni di questo genio, applicandole a problemi quotidiani e usandole per generare nuovi algoritmi utilizzabili in modo straordinariamente efficiente dai computer. Queste sono equazioni iterative: in altre parole, permettono di reintrodurre nella formula i risultati del calcolo precedente per avere un'approssimazione di π ancora migliore. Ramanujan, come la maggior parte dei matematici, non poté resistere alla tentazione di esplorare π, e le sue grandi intuizioni permisero notevoli progressi nello studio di questo numero.

Grazie all'uso delle nuove formule e all'impiego di nuovi algoritmi di calcolo, nel 1973 si raggiunse il milione di decimali, i dieci milioni nell'83, i cento milioni nel 87, il miliardo nell'89.

Le caratteristiche di π

Per tutte le applicazioni di carattere pratico, la conoscenza di π anche con solo 30 decimali è certamente sufficiente. L'ulteriore approfondimento permesso dall'analisi e dall'uso di formule molto efficaci nella determinazione delle cifre decimali, tutte espressioni assai complesse, aveva invece lo scopo di conoscere sempre meglio questo affascinante numero: in particolare si voleva scoprire l'esistenza o meno di una regolarità nella sequenza delle sue infinite cifre decimali.

La scoperta di questa periodicità, oltre a rendere incomparabilmente famoso il suo scopritore, avrebbe condotto, come diretta conseguenza, alla razionalità di π e quindi alla soluzione del problema della quadratura del cerchio e della rettificazione della circonferenza.

Occorre, a questo punto, allargare l'orizzonte degli insiemi numerici utilizzati dai matematici.

L'uomo inizia, nella sua mente, il percorso matematico con i numeri NATURALI, ossia gli interi positivi indicati con la lettera **N**; questi si chiamano Naturali proprio perché l'uomo primitivo, agli albori della civiltà, e i bambini di oggi cominciano a contare gruppi di oggetti esistenti sommando in successione singole unità.

Le ulteriori necessità del conteggio, però, vanno oltre questo insieme numerico, formato da entità semplici e rassicuranti. Si passa allora ai numeri interi negativi, che insieme con i precedenti formano i numeri i RELATIVI indicati con la lettera **Z,** scelta probabilmente perché iniziale del vocabolo tedesco *zaal* che significa numero: essi aiutano a formulare concetti quali temperature sopra e sotto lo 0 o espressioni contabili quali debiti e crediti.

Dopo i Relativi si passa ai numeri frazionari detti RAZIONALI. Dapprima intesi come rapporti semplici, cioè frazioni che danno origine a numeri interi, decimali finiti e decimali periodici semplici o misti, già i Pitagorici si accorsero che era necessario ampliare il modo di considerare tali entità. Esistevano numeri che andavano oltre le tre categorie nominate prima: esistevano cioè numeri che non erano interi, decimali finiti e neppure decimali periodici. Non era più sufficiente, quindi, considerare solo i numeri RAZIONALI, rappresentati dalla lettera **Q**, il cui nome deriva dal vocabolo "ratio" con il quale i greci indicavano il rapporto tra due numeri naturali.

Nascono allora i numeri IRRAZIONALI, ossia non aventi una "ratio", la cui parte decimale è formata da una sequenza di **infiniti numeri** che **non hanno alcuna periodicità**. L'insieme dei numeri RAZIONALI e IRRAZIONALI venne chiamato insieme dei numeri REALI e indicato con la lettera **R**.

π IRRAZIONALE

La **dimostrazione dell'irrazionalità di π** fu consentita dalle conquiste dell'analisi matematica e il traguardo venne raggiunto nel 1761 dal matematico svizzero Heinrich **Lambert** (1728 – 1777) con una dimostrazione che utilizza il procedimento per assurdo.

Questa dimostrazione garantiva che **π**, nel suo sviluppo decimale, non aveva un comportamento uguale a quello dei numeri razionali: non poteva essere finito, ossia tale che le cifre decimali finiscono ad un certo punto, né, tanto meno, periodico, ossia tale da presentare, almeno da un certo punto in poi, la ripetizione di un blocco di numeri. La dimostrazione di Lambert garantiva che il computo dei decimali di **π** non avrebbe mai avuto fine.

Coloro che cercavano di quadrare il cerchio, però, non si lasciarono scoraggiare da questa dimostrazione, perché il fatto che **π** fosse irrazionale non significava che non potesse essere costruito il famoso e tanto agognato segmento uguale a $\sqrt{\pi}$: dopotutto, anche $\sqrt{2}$ aveva uno sviluppo decimale infinito, ma il segmento corrispondente si poteva disegnare benissimo! Esso era la diagonale del quadrato di lato 1!

Prima di arrivare a dipanare la matassa , i matematici dovettero innanzitutto dominare bene il mondo dei numeri irrazionali e poi il legame esistente tra numeri e grandezze geometriche.

All'inizio del XIX secolo, i matematici si trovarono dinnanzi ad una suddivisione dei numeri reali in:

RAZIONALI = esprimibili in frazioni,

IRRAZIONALI = decimali illimitati non periodici,

e alla classe dei numeri già introdotti dai greci:

NUMERI COSTRUIBILI CON RIGA E COMPASSO.

Mettere ordine in questi tre insiemi richiese tempo e fu possibile solo dopo aver raggiunto una caratterizzazione algebrica dei numeri costruibili con riga e compasso.

Al termine di lunghi studi, si ebbe la situazione seguente, nella quale i numeri **IRRAZIONALI** sono distinti in:

ALGEBRICI = sono soluzioni di equazioni a coefficienti interi, dette algebriche, del tipo

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \ldots\ldots \quad a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0 \qquad \text{con } a_i \in Z$$

In base a tale definizione, risulta, ad esempio che:

$\sqrt{2}$ è algebrico perché è soluzione dell'equazione $X^2 - 2 = 0$,

$\sqrt[3]{2}$ è algebrico perché è soluzione dell'equazione $X^3 - 2 = 0$.

TRASCENDENTI = non algebrici, quindi non esiste alcun polinomio a coefficienti interi di cui questi numeri possano essere soluzione.

Figura 4 Joseph Liouville (1809 - 1882)

L'esistenza dei numeri TRASCENDENTI fu provata per la prima volta da **Joseph Liouville** nel **1844**.

Egli dimostrò che non tutti i numeri sono algebrici e per raggiungere questo obiettivo costruì dei numeri le cui caratteristiche fossero più distanti possibile da quelle dei numeri IRRAZIONALI ALGEBRICI.

Innanzi tutto, quindi, non dovevano avere le caratteristiche dei numeri RAZIONALI e pertanto dovevano essere **assolutamente non periodici**.

Liouville decise allora di considerare un numero il cui sviluppo decimale fosse formato da una sequenza di 0 e di 1, in cui i numeri 1 occupassero le posizioni corrispondenti a n!, contando le posizioni sempre a partire dalla prima cifra decimale.

Ossia, poiché

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 1.2.3 = 6$
$4! = 1.2.3.4 = 24$

ecc.

la scrittura del numero risultava la seguente

$$\boxed{0{,}110001000000000000000001000000000\ldots}$$

Liouville in questo modo costruì un insieme di numeri trascendenti perché si dimostra che:

se L è un numero di Liouville, anche L + x è trascendente, con x algebrico.

L'ulteriore progresso si ebbe quando si giunse a capire che:

1) tutti i numeri costruibili con riga e compasso sono algebrici, ma non è vero il viceversa:
   $\sqrt{2}$ è algebrico ed è costruibile con riga e compasso,

$\sqrt[3]{2}$ è algebrico ma non è costruibile con riga e compasso;

2) i numeri costruibili con riga e compasso sono soluzioni di equazioni di 1° e 2° grado e in generale di equazione il cui grado è del tipo 2^n, quindi:

- di equazioni lineari con coefficienti interi del tipo
$$ax + b = 0$$

- di equazioni del tipo
$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \text{con a, b, c interi}$$

- di equazioni che rappresentino, dal punto di vista analitico, intersezioni di rette o circonferenze, quindi appunto con grado del tipo 2^n; questo concetto maturò anche in seguito agli studi di Cartesio che, grazie all'uso sistematico del piano cartesiano, cominciò a comprendere chiaramente le connessioni tra le risoluzioni delle equazioni di primo e secondo grado e le costruzioni con riga e compasso.

Nel 1873 Pierre Lauret Wantzel dimostrò l'impossibilità dei problemi classici della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo dimostrando che $\sqrt[3]{2}$ *e* $sen\left(\frac{x}{3}\right)$ non sono soluzioni di alcuna equazione algebrica che implichi l'uso di radicali.

La duplicazione del cubo richiede la costruzione di un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$, che è un numero algebrico ma di grado 3, quindi non riconducibile al tipo 2^n.

Analogamente, il problema della trisezione dell'angolo richiede la soluzione di un'equazione di grado di 3.

π TRASCENDENTE

Figura 5 Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939)

A questo punto, però, il problema della quadratura del cerchio e della rettificazione della circonferenza poteva essere tradotto diversamente:

" trovare un'espressione algebrica che avesse esattamente π come soluzione".

Nel corso del XIX secolo emergono le risposte mancanti sulla natura di π ed è nel **1882** che il matematico tedesco **Ferdinand Von Lindemann** (1852 – 1939) dimostrò che

π è un numero TRASCENDENTE,

quindi NON algebrico né tanto meno costruibile con riga e compasso.

Erano così definitivamente risolti il problema della quadratura del cerchio e della rettificazione della circonferenza.

Curiosità su π

- Sulla terra il valore di **π** sembra sia legato al corso dei grandi fiumi dall'andamento tortuoso e dalla corrente lenta e pigra. Confrontando la distanza in linea d'aria tra la sorgente e la foce del corso d'acqua con la lunghezza effettiva del percorso del fiume, tenendo conto, quindi, di tutte le anse e i meandri che esso può formare, si può osservare che il rapporto è vicino a 3,14. Il rapporto delle due lunghezze si avvicina tanto più a **π** quanto più il terreno è pianeggiante. L'esempio migliore di questa osservazione è data dal corso del Rio delle Amazzoni.

- Da qualche anno, il 14 marzo si festeggia **π**. Questa originale manifestazione, che mira a ricordare la magnificenza di tale numero indispensabile per la nostra vita quotidiana (mah!?!), è stata inventata dall'Exploratorium di San Francisco, il grande Museo della Scienza, con una serie di giochi e musiche ispirati al **π**. L'idea nasce dalla scrittura delle date nella forma inglese, per cui il **14 marzo** risulta scritto: **3 14.**

- **CITAZIONI** su **π**

Il numero pi greco, correttamente interpretato, contiene l'intera storia dell'umanità.

Martin Gardner

- *La faccia di Pi greco era mascherata e si capiva che nessuno avrebbe potuto vederla e restare vivo. Ma dalla maschera usciva uno sguardo penetrante, inesorabile, freddo ed enigmatico.*

Bertrand Russell

- *L'Universo è un cerchio, il cui centro è ovunque e la circonferenza da nessuna parte.*

Blaise Pascal

π e la quadratura del cerchio nella Divina Commedia

Paradiso, XXXIII, 133 – 138

Qual è '1 geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;

ma non eran da ciò le proprie penne:
se non che la mia mente fu percossa
da un fulgore che in sua voglia venne.

A l'alta fantasia qui mancò possa;
ma già volgeva il mio disio e'1 velle
si come rota ch'igualmente è mossa,
l'amor che move il sole e l'altre stelle.

I decimali di π, che hanno interessato i migliori cervelli matematici del mondo e sono stati conquistati dapprima faticosamente poi sempre più velocemente, grazie all'impiego dei calcolatori elettronici, agli effetti pratici non hanno ragione di continuare ad impegnare i computer. Le cifre di π si susseguono all'infinito in un fiume che appare del tutto casuale. Al di là del gusto di stabilire un certo tipo di record, potrebbe sembrare che il tentativo di calcolare milioni di decimali del numero sia del tutto ozioso. Trentanove cifre di π sono sufficienti per calcolare la circonferenza di un cerchio che racchiuda l'intero universo noto, con un errore non superiore al raggio di un atomo di idrogeno. E' difficile immaginare situazioni fisiche che richiedano un numero maggiore di cifre.
I matematici ed esperti di calcolatori non si accontentano, per esempio, delle prime 50 cifre decimali di π per diverse motivazioni. Una di queste consiste nel fatto che il calcolo di π è diventato una sorta di parametro per l'elaborazione;ossia serve come misura della raffinatezza e dell'affidabilità dei calcolatori che lo effettuano. Inoltre, la ricerca di valori sempre più precisi di π porta i matematici a scoprire risvolti inattesi e interessanti della teoria dei numeri.

Un'altra motivazione, forse più sincera, che induce a proseguire gli studi su questo argomento è semplicemente l'esistenza stessa di π: in effetti, esso **è un tema fisso della cultura matematica da più di due millenni e mezzo**.

EUCLIDE e la sistemazione delle antiche conoscenze.

La vita

Figura 1 Ritratto di Euclide di Justus Van Ghent (XV secolo)

Euclide visse intorno al 300 a.C., poco dopo la morte di Platone (347 a.C.); contemporaneo ma più vecchio di Aristotele, muore intorno al 275 a.C..
Rispetto al vasto successo che ha avuto la sua opera maggiore, "Gli Elementi", molto scarse sono le notizie pervenute sulla vita dell'autore; giunte ai giorni nostri soprattutto grazie alle opere dello storico greco Proclo (V sec. d.C.), che rappresenta una delle testimonianze più importanti su Euclide. Egli scrisse che Euclide era il più giovane dei discepoli di Platone ed era più vecchio di Archimede.
Euclide, secondo alcuni studiosi, era platonico al punto di porre come scopo finale dei suoi Elementi la costruzione dei poliedri regolari (le figure cosmiche del Timeo).
Euclide operò ad Alessandria d'Egitto al tempo di Tolomeo I.

Questi fu il monarca illuminato che, nel 306 a.C., riuscì a prendere saldamente il controllo della parte egiziana dell'impero greco, afflitto da dure lotte intestine dopo la morte di Alessandro Magno. Tolomeo istituì ad Alessandria un'accademia, nota come il *Museo*, che fu una vera e propria università dell'epoca, nata con primario scopo di ricerca e poi d'insegnamento.
Euclide fu tra il gruppo d'eminenti studiosi chiamati ad insegnare alla scuola alessandrina e sembra che brillasse per abilità didattica e doti espositive. Per questo motivo Euclide è noto come Euclide di Alessandria, da non confondere, quindi, con Euclide di Megara, che in alcune edizioni degli Elementi è indicato come autore ma che era invece un allievo di Socrate.
Riguardo alla vita e alla personalità di Euclide sono spesso riportati due aneddoti che lo avrebbero riguardato.
Il primo racconta che il re Tolomeo chiedesse un giorno ad Euclide se, per apprendere la geometria, non esistesse una via più facile e breve di quella dello studio degli elementi. La tradizione racconta che, di rimando, il matematico gli abbia risposto che non esistono vie regie, ossia più semplici e facilmente percorribili, per poterla conoscere.
Il secondo riferisce che, una volta, uno studente chiese ad Euclide quale guadagno avrebbe potuto trarre dalla fatica di apprendere la matematica; il maestro lo fece semplicemente cacciare dall'aula, dopo avergli fatto consegnare, per dileggio, una moneta da un inserviente dicendo: "perché egli ha bisogno di trarre profitto da ciò che impara".
Tali episodi, forse, sono non tanto veri quanto rivelatori della mentalità greca dell'epoca: l'insegnamento della matematica ottemperava a pure esigenze logico dimostrative e quindi non era facilmente apprendibile. Il sapere matematico, inoltre, aveva un valore puramente conoscitivo, perciò estraneo ad interessi applicativi e pratici.

Le opere

Le opere di Euclide giunte sino a noi, oltre agli Elementi, sono *I Dati*, *La Divisione delle figure, I Fenomeni* e *l'Ottica*. Sono invece andate completamente perdute altre produzioni, di cui è rimasta traccia in diversi scritti dell'antichità. Tra queste, una soprattutto sarebbe stata particolarmente interessante ed è quella intitolata i ***Porismi***. Da tale opera, una raccolta di tre libri giunti fino a noi grazie al riassunto che ne fece Pappo, probabilmente si sarebbe potuta avere un'idea di quanto Euclide si fosse avvicinato alla geometria analitica: se, come si è pensato, un porisma era una specie d'equazione di una curva scritta a parole, ossia un'equazione verbale, la differenza fondamentale con l'attuale geometria analitica sarebbe stata determinata, essenzialmente, dalla mancanza della simbologia e delle tecniche di calcolo oggi in uso.

Ottica

L'opera, attribuita ad Euclide, rappresenta il primo trattato greco relativo alla geometria della visione diretta, ossia alla prospettiva.
Esso ci è giunto in due versioni: la più antica sembra essere quella originale, mentre la seconda è dovuta ad una revisione di Teone d'Alessandria (IV sec. d.C.), già noto per aver fornito una versione rivisitata degli Elementi.
In questa opera Euclide sosteneva una teoria "emissiva" della luce, secondo la quale l'occhio emette dei raggi che, "procedendo per via diritta", raggiungono gli oggetti rendendoli visibili. "La figura compresa tra i raggi visivi è un cono che ha il vertice nell'occhio e la base al margine dell'oggetto". Tale teoria si contrapponeva alla dottrina di Aristotele, secondo la quale una sorta di azione si trasmetteva in linea retta, attraverso un mezzo, dall'oggetto all'occhio. Uno degli obiettivi di questa opera era quello di combattere il concetto epicureo secondo il quale le dimensioni di un oggetto erano quelle che apparivano alla vista, senza tenere conto del rimpicciolimento dovuto alla prospettiva.
Tra i circa sessanta Teoremi che costituiscono l'opera, merita di essere ricordato quello che afferma che "rette parallele viste in distanza non appaiono parallele".

La Catottrica studia il fenomeno della riflessione della luce ed è usualmente pubblicata con l'Ottica, ma è ritenuta opera non euclidea. Gli antichi avevano diviso lo studio dei fenomeni ottici in tre parti: l'ottica, o geometria della visione diretta; la catottrica, o la geometria dei raggi riflessi e la diottrica, o la geometria dei raggi rifratti. In tale scritto è fornita la teoria delle immagini date dagli specchi piani, sferici, concavi e convessi e vi si trovano studiati, tra l'altro, anche gli specchi ustori.

Fenomeni: scritto di geometria sferica ad uso astronomico.

Divisione delle figure

Tale opera comprende una raccolta di proposizioni relative alla divisione delle figure piane.

Dati

Opera piuttosto simile alla precedente, sembra sia stata scritta per essere utilizzata al museo quale volume sussidiario ai primi sei Libri degli Elementi. Molte proposizioni servono come regole o formule algebriche, mentre altre ricordano allo studente alcune possibili deduzioni, ossia informazioni inespresse, che possono essere contenute nei dati forniti da un problema: per esempio, dato il rapporto tra due segmenti, si conosce anche il rapporto tra le aree di figure simili costruite su tali segmenti. In sostanza, sembra dovesse servire come guida all'analisi dei problemi di geometria al fine di scoprire le dimostrazioni.

I Luoghi superficiali, andato perduto

Le Coniche, andato perduto

L'opera maggiore di Euclide: "Gli Elementi"

Figura 2 Frontespizio di una traduzione in latino degli Elementi del 1572

L'opera euclidea *Gli Elementi* costituì lo scritto scientifico più tradotto e studiato, ma non fu un compendio di tutte le conoscenze geometriche del tempo: essa venne scritta con l'intento di fornire agli studenti del Museo un manuale introduttivo, sobriamente esposto e logicamente strutturato, sugli elementi di base della matematica elementare. A questo proposito Proclo descrisse gli Elementi come qualcosa che, rispetto al resto della matematica, aveva lo stesso tipo di rapporto che le lettere dell'alfabeto hanno rispetto al linguaggio.
In ogni caso, i punti essenziali messi in evidenza dalla grande sintesi euclidea sono due.

L'indipendenza della geometria dall'aspetto materiale.
Prima di Talete gli enti geometrici non erano intesi in senso ideale ma erano ancorati ad oggetti materiali. Il merito del pensiero greco è stato quello di essere riuscito a concepire tali enti come astratti, svincolati dagli oggetti fisici o dalle loro eventuali rappresentazioni e, come tali, suscettibili di trattazione puramente razionale con valore di universalità.
A questo proposito, importante fu l'influenza che il filosofo Platone ebbe in ambito matematico: il contributo non fu tanto contenutistico quanto relativo allo stimolo sull'essenza conoscitiva dell'indagine matematica. Platone illustra le motivazioni della sua idea in molti passi dei Dialoghi. In particolare nella Repubblica egli afferma che "i matematici si valgono di forme visibili, e ragionano intorno ad esse, non ad esse pensando, ma ai corpi di cui sono la rappresentazione, ragionando del quadrato in se stesso e della diagonale in se stessa, e non di quello o di quella che disegnano". Platone considerava le conoscenze della matematica come sguardi gettati nel mondo delle idee e fu per questo motivo che l'iscrizione sopra la sua Accademia riportava la scritta: "Non entri chi non sa di geometria".

L'introduzione del procedimento dimostrativo.
Molte proprietà geometriche erano già note agli Egizi e ai Babilonesi che le avevano ricavate, soprattutto empiricamente, studiando vari casi particolari. I Greci furono i primi anche nel collegare le varie proposizioni tramite dimostrazioni e nel ricondurre proprietà complesse a quelle più semplici mediante ragionamenti deduttivi.
Sotto quest'aspetto, gli Elementi costituiscono la prima realizzazione dell'ideale aristotelico di una scienza costruita assiomaticamente: in essa gli assiomi e i postulati costituiscono il punto di partenza per la deduzione formale, ma sono anche principi veri di per sé, che garantiscono, con la loro evidenza, la veridicità contenutistica della scienza che da essi viene edificata.

Euclide fu il massimo esponente di quest'impostazione e intese ordinare la geometria secondo quello che oggi si chiama sistema ipotetico deduttivo. Il costrutto del sistema si basa su alcune affermazioni iniziali, dette assiomi; essi costituiscono il punto di partenza del successivo sviluppo di teoremi che, dalle premesse iniziali, gli assiomi appunto, devono essere provati. Il metodo deduttivo

procede dal generale al particolare perché partendo dalle affermazioni di base ricava proprietà caratteristiche in ambiti più specifici.
Si può osservare che il tipo di procedimento inferenziale opposto a quello *deduttivo* è il ragionamento *induttivo*, che procede dal particolare al generale. Il metodo induttivo, tipico delle scienze sperimentali quali la statistica o la fisica, si basa sull'osservazione e sullo studio d'innumerevoli casi particolari relativi ad un dato fenomeno. Esaminando poi le possibili relazioni intercorrenti tra i dati rilevati, tale metodo prevede l'elaborazione di leggi che consentono di prevedere il comportamento del fenomeno in questione.

L'opera euclidea è composta di 13 libri o capitoli così suddivisi:

- i primi sei trattano di geometria piana;
- i tre seguenti, dal 7 al 9, di teoria dei numeri, o meglio, di aritmetica in veste geometrica;
- il decimo riguarda gli incommensurabili;

gli ultimi tre libri trattano la geometria solida. Essi terminano con la costruzione dei cinque poliedri regolari (tetraedro, esaedro o cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro), detti anche "*figure cosmiche*" o *platoniche*. La sfera non è trattata in quest'ambito perché il suo studio era considerato parte dell'astronomia.

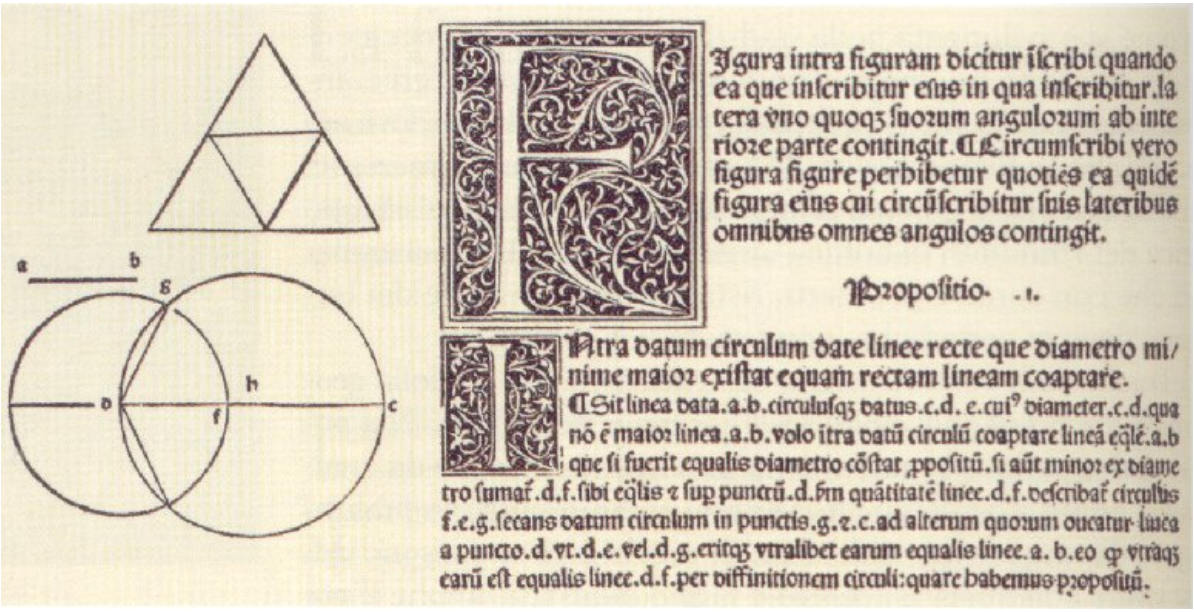


Figura 3 Pagina di una edizione quattrocentesca degli Elementi

Da Proclo sappiamo che la procedura usata nelle diverse proposizioni euclidee seguiva degli schemi quasi rituali. Tale impostazione, lungi dal mortificare l'immaginazione, aveva l'intento di potenziare le facoltà mentali, attraverso un preciso inquadramento logico e discorsivo che ne valorizzava la robustezza e la coerenza.
Euclide assunse come fondamento della costruzione un esiguo numero di "principi" non dimostrati, e da queste fondamentali premesse ricavò un gran numero di teoremi rigorosamente provati.
I principi fondamentali furono ripartiti da Euclide in tre categorie:
Termini o *Definizioni*, in cui egli tenta d'esplicitare i termini del discorso;
Postulati, che egli riteneva fossero affermazioni vere, specificamente valide in ambito geometrico;
Nozioni comuni, che erano affermazioni dotate della più grande generalità e di evidente verità.
Da queste premesse Euclide dedusse i successivi teoremi, seguendo una procedura ben precisa e standardizzata. Ogni proposizione si apriva con un chiaro "enunciato" (pròtasis) e poi, subito, si dava "delucidazione" (écthesis) delle condizioni da imporsi ai dati, onde limitarne l'arbitrarietà. Seguiva una ripetizione dell'enunciato ai fini di una sua corretta "applicazione" (diorismòs) alla figura. Veniva poi il momento della "costruzione" (catascheuè) dell'oggetto indagato, mediante

l'enumerazione di tutte le grandezze e proprietà necessarie ai fini di una rigorosa deduzione. Si giungeva, quindi, alla vera e propria "dimostrazione" (apòdeixis). Infine, si formulava la logica "conclusione" (sympèrasma), che usualmente si articolava ripetendo, invertite, prima l'ècthesis e poi la pròtasis e con le rituali dichiarazioni "*come dovevasi dimostrare*" (c.d.d.) o "*come dovevasi fare*" (c.d.f.).

Libro I

Il Libro I si apre con l'esposizione dei principi fondamentali. Esso inizia, quindi, con 23 definizioni, delle quali è riportato l'elenco in lingua latina delle prime 18; segue la loro corrispondente traduzione italiana e quindi le rimanenti definizioni.

ELEMENTORUM LIBER I

Definitiones.

I. Punctum est, cuius pars nulla est.

II. Linea autem sine latitudine longitudo.

III. Lineae autem estrema puncta.

IV. Recta linea est, quaecunque ex aequo punctis in ea sitis iacet.

Y. Superficies autem est, quod longitudinem et latitudinem solum habet.

VI. Superficies autem extrema lineae sunt.

VII. Plana superficies est, quaecunque ex aequo rectis in ea sitis iacet.

VIII. Planus autem angulus est duabus lineis in plano se tangentibus nec in eadem recta positis alterius lineae ad alteram inclinatio.

IX. Ubi uero lineae angulum continentes rectae sunt, rectilineus adpellatur angulus.

X. Ubi uero recta super rectam lineam erecta angulos deinceps positos inter se aequales efficit, rectus est uterque augulus aequalis, et recta linea erecta perpendicularis adpellatur ad eam, super quam erecta est.

XI. Obtusus angulus est, qui maior est recto.

XII. Acutus uero, qui minor est recto.

XIII. Terminus est, quod alicuius rei extremum est.

XIV. Figura est, quod aliquo uel aliquibus terminis comprehenditur.

XV. Circulus est figura plana una linea comprehensa, ad quam quae ab uno puncto intra figuram posito educuntur rectae omnes aequales sunt.

XVI. Centrum autem circuli punctum illud adpellatur.

XVII. Diametrus autem circuli recta quaedam est linea per centrum ducta et terminata utrimque ambitu circuli, qnae quidem linea circulum in duas partes aequales diuidit.

XVIII. Semicirculus autem ea est figura, quae diametro et arcu ab ea absciso comprehenditur. Centrum uero semicirculi idem est, quod ipsius est circoli.

Libro I degli Elementi

Definizioni

1° Il punto è ciò che non ha parti.

2° Linea è lunghezza senza larghezza.

3° Estremi di una linea sono punti.

4° Linea retta è quella linea che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa.

5° Superficie è ciò che ha soltanto larghezza e lunghezza.

6° Estremi di una superficie sono linee.

7° Superficie piana è quella superficie che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa.

8° Angolo piano è l'inclinazione di due linee su un piano che si toccano e non sono poste sulla stessa retta.

9° Dove le linee che contengono l'angolo sono rette, l'angolo si dice retto.

10° Quando una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata.

11° Un angolo è ottuso se è maggiore di un angolo retto.

12° Acuto è quello che è minore di un angolo retto.

13° Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.

14° Figura è ciò che è compresa da uno o più termini.

15° Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea tale che tutte le rette, le quali cadono sulla linea (a partire) da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali tra loro.

16° Quel punto è chiamato centro del cerchio.

17° Si chiama diametro del cerchio una qualsiasi linea passante per il centro che termina sul cerchio la quale linea divide il cerchio in due parti uguali.

18° Il semicerchio è anch'esso una figura, compresa tra un diametro e l'arco da esso "individuato". Il centro del semicerchio è lo stesso di quello del suo cerchio.

19. Si dicono rettilinee le figure delimitate da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro rette e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.

20. Si dice triangolo equilatero la figura trilatera che ha i tre lati uguali, triangolo isoscele quella che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quella che ha i tre lati disuguali.

21. Si dice inoltre triangolo rettangolo la figura trilatera che ha un angolo retto, triangolo ottusangolo quella che ha un angolo ottuso, e triangolo acutangolo quella che ha i tre angoli acuti.

22. Si dice quadrato la figura quadrilatera che ha i lati uguali e gli angoli retti.

23. Si dicono parallele rette giacenti nello stesso piano che, prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni, non si incontrino fra loro da nessuna delle due parti.

Nella maggior parte dei manoscritti, Postulati e Nozioni comuni appartengono ad un unico elenco formato da dieci supposizioni; in ogni caso Euclide, dopo le definizioni elenca cinque

Postulati

I) Si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi ad un punto qualsiasi.

II) Si possa prolungare indefinitamente una linea retta.

III) Si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi.

IV) Tutti gli angoli retti siano uguali.

V) Se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

Al termine dei postulati sono elencate cinque

Nozioni comuni

I) Cose uguali ad una medesima cosa sono uguali anche tra loro.

II) Se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, gli interi sono uguali.

III) Se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali.

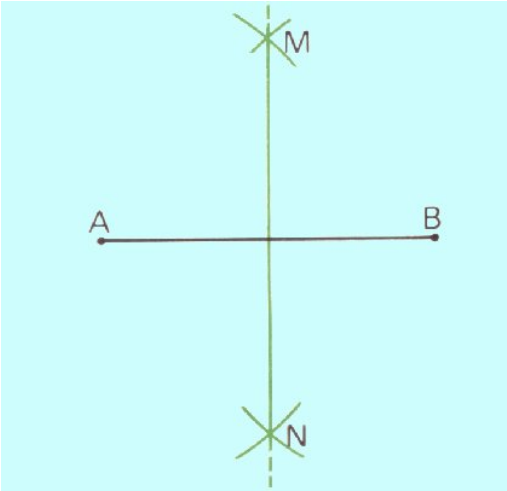
IV) Cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra.

V) L'intero è maggiore della parte.

Le proposizioni contenute in questo libro comprendono i teoremi sulla congruenza dei triangoli, sulle costruzioni semplici con riga e compasso, sulle disuguaglianze relative ad angoli e lati di un triangolo, sulle proprietà delle rette parallele e dei parallelogrammi.

ALCUNE COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO

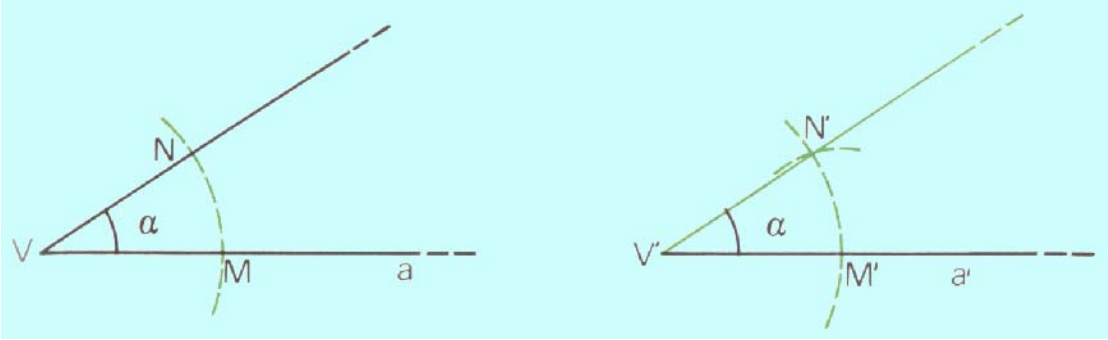
ASSE DEL SEGMENTO e PUNTO MEDIO



- Si descrivano due archi di circonferenza con centro in *A* e *B* e stessa apertura a piacere, purché maggiore della metà di *AB*.
- I due archi di circonferenza si incontrano nei punti *M* e *N*, chiaramente equidistanti da *A* e da *B* perché i segmenti *MA, MB, NA, NB,* sono raggi di circonferenze congruenti.
- L'asse del segmento *AB,* in quanto luogo geometrico dei punti equidistanti da *A* e *B,* è quindi la retta per *M* e *N*.

- Il punto d'intersezione tra l'asse e il segmento dato rappresenta il punto medio dello stesso segmento.

COSTRUZIONE DI UN ANGOLO DATO SU UNA DATA SEMIRETTA



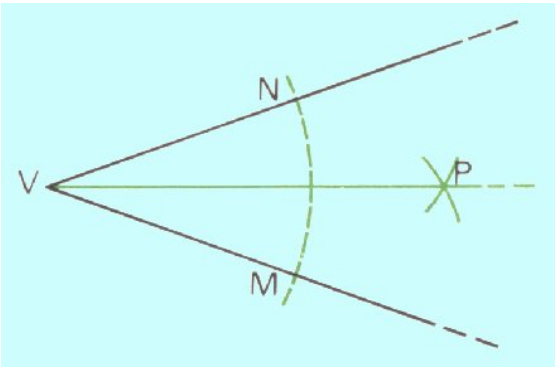
- Sia **α** l'angolo di vertice *V* da trasportare con il vertice nel punto *V* 'e un lato sulla semiretta *(V', a')*.

- Con centro in *V* e raggio a piacere, si tracci un arco di circonferenza che incontri i lati dell'angolo **α** in due punti *M* e N.

- Con centro in *V'* e con apertura *VM* si descriva un arco di circonferenza e sia *M'* il punto d'incontro tra questo e la semiretta *(V',a')*.

- Con centro in *M'* e raggio *MN* si descriva un arco che incontri quello precedente nel punto *N',* il triangolo isoscele *V'M'N'* è uguale al triangolo *VMN* per il *terzo criterio di congruenza,* per cui l'angolo in *V'* è uguale ad **α.**

BISETTRICE DI UN ANGOLO



- Centrato il compasso nel vertice *V* dell'angolo, si descriva una qualsiasi circonferenza e siano *M* e *N* i punti in cui essa incontra i lati dell'angolo.

- Si traccino poi, con centro in *M* e in *N,* due circonferenze congruenti e di raggio abbastanza grande perché si incontrino, quindi maggiore della metà di *MN*,.

- Detto *P* il punto di incontro delle due circonferenze, la semiretta *VP* è la bisettrice richiesta; infatti i triangoli *VMP* e *VNP,* avendo i tre lati congruenti , sono congruenti e l'angolo *MVP* è congruente all'angolo *NVP*.

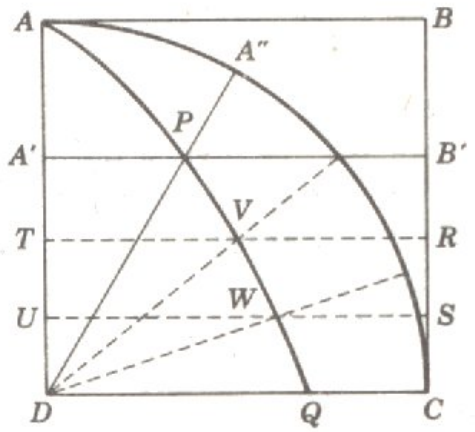
La costruzione della bisettrice permette la *bisezione* dell'angolo mentre la ***divisione di un angolo in tre parti uguali, adoperando solo la riga e il compasso, è il terzo dei problemi classici dell'antichità***: infatti, se tale problema è risolubile per alcuni casi particolari, ciò non è vero in generale.

IL TERZO PROBLEMA CLASSICO:

LA TRISEZIONE DELL'ANGOLO

Il terzo problema classico consiste nella suddivisione di un angolo in tre parti congruenti.
Questo problema, come pure i due precedenti relativi alla duplicazione del cubo e alla quadratura del cerchio, divennero molto popolari presso i Greci e la ricerca di una costruzione geometrica effettuata con riga e compasso impegnò per molto tempo i migliori matematici di tutte le epoche.
Soluzioni dei tre problemi, infatti, erano già note sin dall'antichità, ma esse non coinvolgevano solo i due strumenti elementari.
Archita di Taranto (nato alla fine del V secolo a.C.) ottenne per primo la costruzione geometrica che risolse il problema di Delo, attraverso una complessa serie d'intersezioni tra cerchi, coni e cilindri; Dinostrato (attivo intorno al 335 a.C.) fu il padre di una prima descrizione di un metodo geometrico che porta alla quadratura del cerchio; Ippia di Elide, vissuto ad Atene nella seconda metà del V secolo a.C., e Pappo, vissuto verso la fine del III secolo d.C., idearono due costruzioni che permettevano di risolvere il problema della trisezione.

Verso la fine del V secolo a.C., era attivo ad Atene un gruppo di sapienti che, a differenza dei pitagorici ai quali era proibito guadagnare denaro in cambio degli insegnamenti, vivevano istruendo i propri concittadini. Fra questi vi era, appunto, anche Ippia di Elide, del quale ci sono pervenute molte notizie grazie a Platone e sembra si debba a lui la prima introduzione di una curva dopo le retta e la circonferenza.
Proco ed altri autori gli attribuiscono la paternità della curva che da allora prende il nome di ***Trisettrice*** o ***Quadratrice di Ippia***, perché può essere utilizzata sia per trisecare un angolo sia per ottenere la quadratura del cerchio, fatto rilevato esplicitamente solo più tardi da Dinostrato.



Tale curva viene ottenuta considerando il quadrato *ABCD*.
Si supponga che la retta *AB* si muova verso il basso di moto rettilineo uniforme sino a raggiungere la posizione *DC*.
Tale movimento avviene contemporaneamente alla rotazione in senso orario del lato *DA*, attorno al punto *D*, sino a coincidere con il lato *DC*.
I punti di intersezione delle due rette che si muovono rappresentano la trisettrice di Ippia, ossia la curva *APQ*.
Ora, se *PDC* è l'angolo da trisecare, si devono trisecare i segmenti *A'D* e *B'C* rispettivamente attraverso i punti *T*, *U* e *R*, *S*.
I segmenti *TR* e *US* tagliano la trisettrice rispettivamente in *V* e *W*: i segmenti *DV* e *DW* dividono l'angolo dato in tre parti congruenti.

Mentre uno dei metodi ideati da Pappo coinvolgeva l'utilizzo di un'iperbole, e quello ideato da Nicomede, attivo verso il 200 a.C., utilizzava una complessa curva chiamata ***concoide di Nicomede,*** la quale consentiva di risolvere sia la duplicazione del cubo che la trisezione dell'angolo, un procedimento che risolve il problema della trisezione con strumenti particolari è, ad esempio, il ***Trisettore di Tissaudier.***

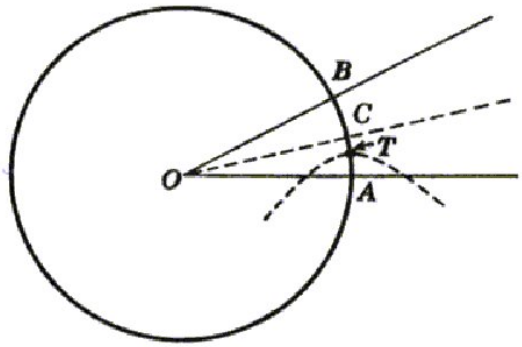
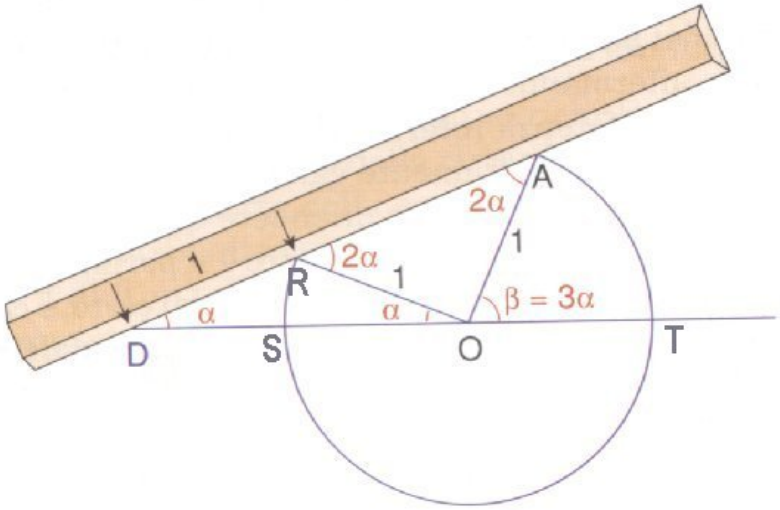


Figura 4 Costruzione di Pappo con l'uso di un'iperbole



Questa costruzione si serve di una riga graduata in cui compare la sola unità di misura, cosa comunque non consentita dalle tradizionali costruzioni con riga e compasso, come pure non erano consentiti il movimento o la costruzione di curve.
Se $\boldsymbol{\beta}$ è l'angolo da trisecare, si costruisce la circonferenza con centro nel vertice dell'angolo e raggio pari all'unità di misura; si considera poi il prolungamento del diametro *ST*.
Appoggiata la riga nel punto *A*, intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza, si fa ruotare la riga attorno a questo punto sino a che le due tacche dell'unità incontrano la circonferenza in *R* e la retta *ST* in *D*.
Osservando la costruzione ottenuta si ha che i due triangoli *DRO* e *ROA* sono isosceli in quanto i lati obliqui sono tutti corrispondenti all'unità.
Se nel triangolo *DRO* si indica l'angolo in *D* con $\boldsymbol{\alpha}$, anche l'angolo *ROD* misura α, perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
L'angolo *ARO*, invece, in base al teorema dell'angolo estero di un triangolo, il quale afferma che in un triangolo ogni angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti, misura $\boldsymbol{2\alpha}$, e così pure l'angolo *RAO*, perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
L'angolo $\boldsymbol{\beta}$, allora, risulta essere angolo esterno del triangolo *ODA*, ed applicando nuovamente il teorema dell'angolo esterno si ha che esso misura

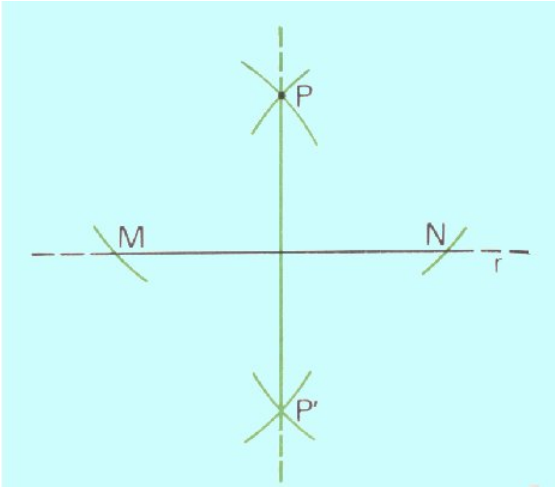
$$\boldsymbol{\beta = \alpha + 2\alpha = 3\alpha}$$

Resta così costruito l'angolo

$$\alpha = \frac{1}{3}\beta$$

Dopo oltre 2200 anni, come si è già detto, si dimostrò che tutti e tre questi problemi non potevano avere soluzione utilizzando solo la riga e il compasso, ma i tentativi fatti per venirne a capo e gli studi eseguiti nel tentativo di approfondire le tematiche ad essi relative portarono ad ottenere straordinari risultati in vari altri campi della matematica.

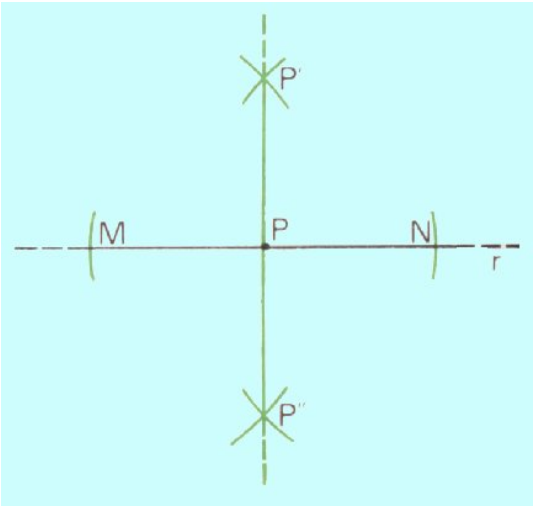
PERPENDICOLARE AD UNA RETTA DA UN PUNTO DATO



Si hanno due casi.

Il punto P non appartiene ad r

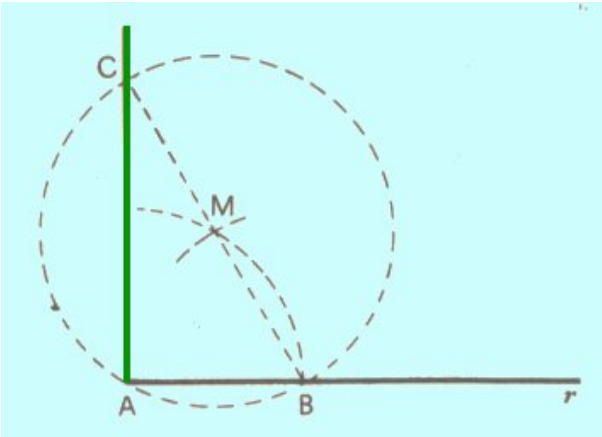
- Con centro in *P* e con raggio maggiore della distanza di *P* da *r,* si tracci una circonferenza che incontri la retta *r* in due punti *M* e *N*.
- L'asse del segmento *MN,* che passa per *P,* è la perpendicolare richiesta.



Il punto P appartiene a r.

- Con raggio qualsiasi si descriva una circonferenza di centro *P,* e siano *M* e *N* i punti in cui essa incontra la retta r.
- L'asse del segmento *MN* è la retta richiesta.

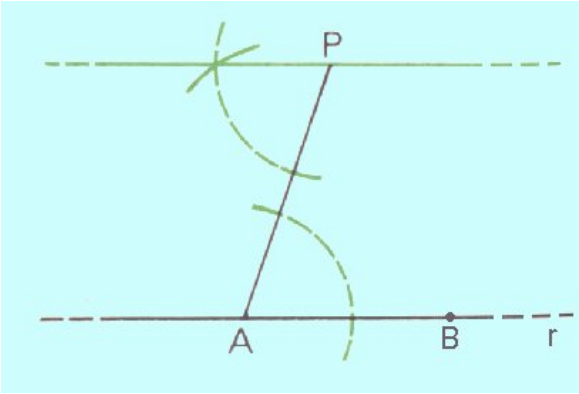
PERPENDICOLARE AD UNA SEMIRETTA DATA NELLA SUA ORIGINE



- Con centro in *A* e raggio a piacere si descriva una circonferenza che intersechi r in *B*.
- Con centro in *B* e raggio *AB* si descriva un'altra circonferenza che intersechi la precedente in *M*.
- Con centro in *M* e raggio *MB* si descrive una terza circonferenza che intersechi il prolungamento di *BM* in *C*.

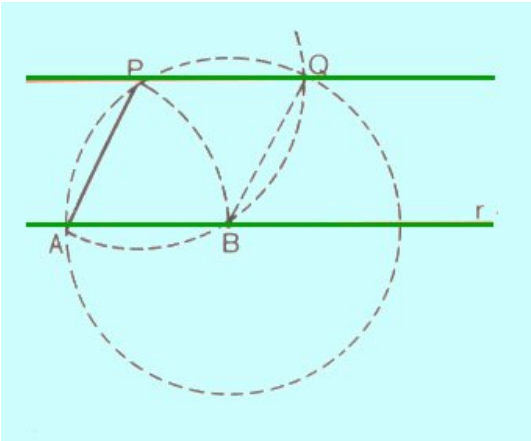
La retta *CA* è la perpendicolare richiesta poiché l'angolo in *A* risulta inscritto in una semicirconferenza.

PARALLELA AD UNA RETTA DATA PER UN PUNTO P AD ESSA ESTERNO



1° METODO

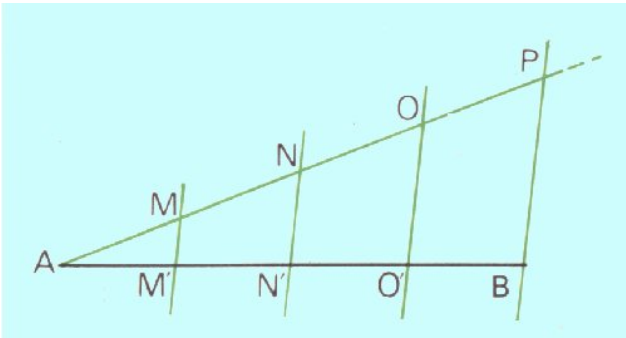
- Si unisca *P* con un punto *A* qualsiasi della retta *r*.
- Si costruisca un angolo con il vertice in *P* e un lato su *PA* congruente all'angolo in *A*.
- La retta a cui appartiene il secondo lato dell'angolo è la parallela alla retta *r* cercata, infatti le due rette formano due angoli alterni interni congruenti.



2° METODO

- Data una retta *r* ed un punto *P* fuori di essa, si unisca *P* con un punto qualsiasi *A* della retta.
- Con apertura di compasso congruente ad *AP* e centro in *A*, si individui su *r* un altro punto *B*.
- Sempre con apertura di compasso congruente ad *AP* si traccino due circonferenze con centri in *P* e in *B*. Tali circonferenze si intersecheranno in *A* e in un altro punto *Q*.
- La retta *PQ* è la retta richiesta; infatti, il quadrilatero *ABPQ*, avendo i lati ordinatamente congruenti, è un rombo e come tale ha i lati opposti paralleli.

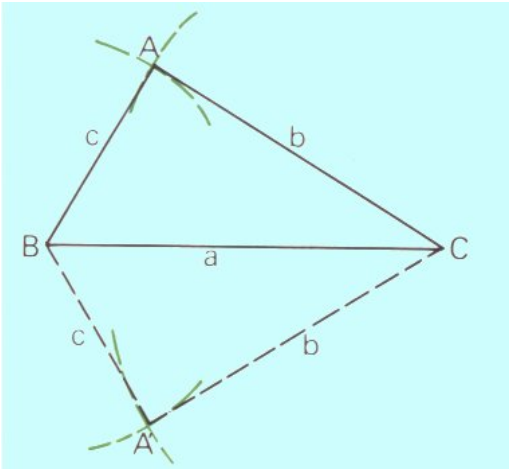
DIVISIONE DI UN SEGMENTO IN *n* PARTI CONGRUENTI



- Tracciata per l'estremo *A* del segmento dato una semiretta qualsiasi, si riportino su di essa, a partire da *A*, ***n*** segmenti di lunghezza arbitraria tutti tra loro congruenti.
- Detto *P* il secondo estremo dell'ultimo segmento, si unisca *P* con il secondo estremo *B* del segmento dato.
- Si traccino ora dagli estremi dei segmenti costruiti le parallele a *PB*, ottenendo così un fascio di rette parallele.
- In base al teorema di Talete, data la congruenza dei segmenti *AM, MN, NO*, e *OP*, il segmento *AB* viene suddiviso in n segmenti tra loro congruenti.

COSTRUZIONE DI TRIANGOLI

COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO DEL QUALE SIANO NOTI I TRE LATI

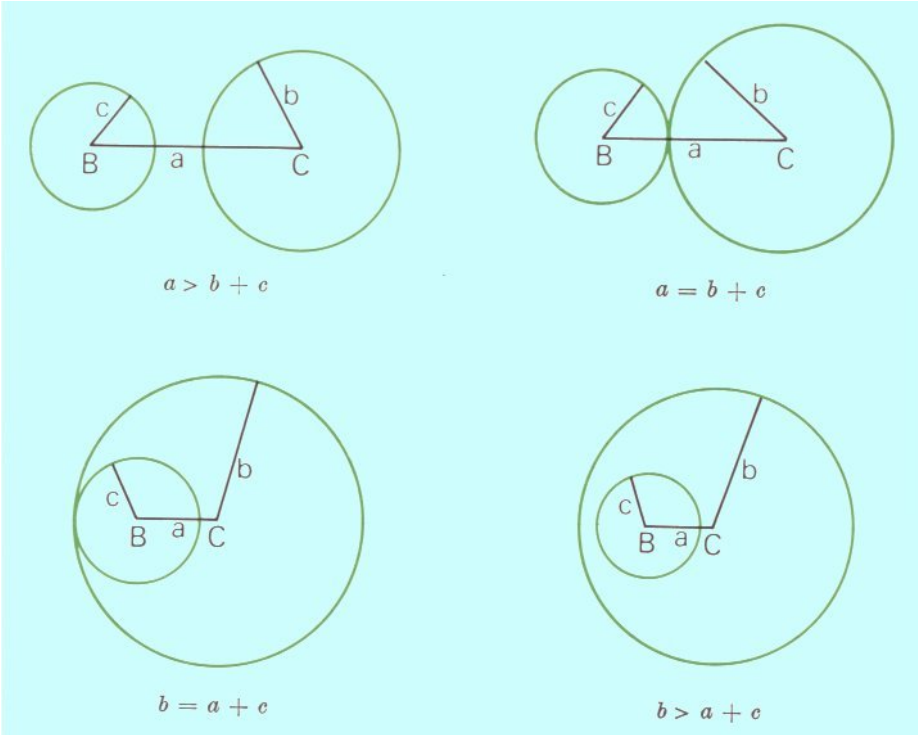


- Dati i segmenti *a, b,* e *c*, corrispondenti ai lati del triangolo da costruire, si può osservare che, supponendo di aver già costruito il triangolo avente il segmento *BC* di lunghezza *a* come base, il terzo vertice *A* deve distare *c* da *B* e *b* da *C*.

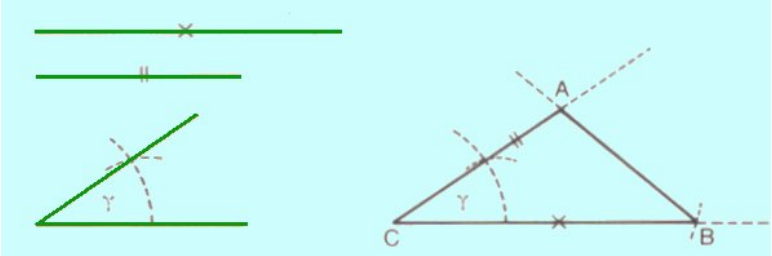
- In base a tale considerazione, occorre tracciare le due circonferenze di centri *B* e *C* e di raggi rispettivamente *c* e *b*. L'intersezione di tali circonferenze, se ci sono, determinerà la posizione del terzo vertice *A*.

- Poiché, inoltre, le intersezioni delle due circonferenze, se ci sono, sono due, si avranno due triangoli simmetrici rispetto a *BC*.

La precisazione relativa all'esistenza delle due intersezioni è riferita al fatto che esse potrebbero non esserci e, in questo caso, la costruzione del triangolo risulta impossibile.
Tale impossibilità è relativa al caso in cui, dati i tre segmenti, può non essere verificata una delle necessarie disuguaglianze triangolari, in base alle quali "ogni lato deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza".
In caso ciò non accadesse, infatti, si potrebbero avere le seguenti situazioni:

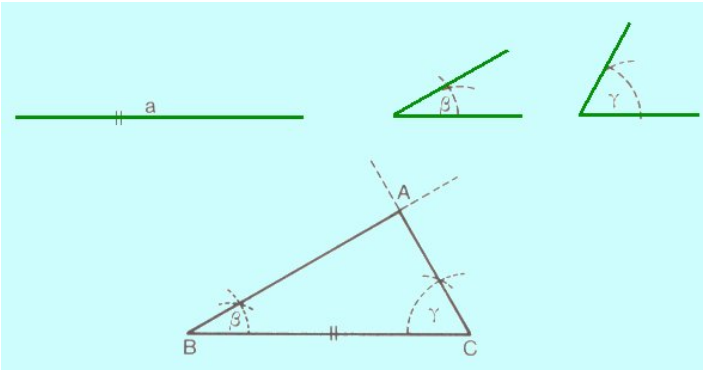


COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO DATI DUE LATI *a* e *b* E L'ANGOLO COMPRESO *γ* .



- Si costruisce un angolo di vertice *C* congruente all'angolo dato **γ**.
- Con centro in *C* e apertura di compasso uguale a *b*, si traccia un arco che incontra un lato dell'angolo in *B*.
- Sempre con centro in *C* e apertura di compasso uguale ad *a*, si descrive un arco che incontra l'altro lato dell'angolo in *A*.
- Unito *A* con *B* si ottiene il triangolo richiesto.

COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO DATI UN LATO E I DUE ANGOLI ADIACENTI



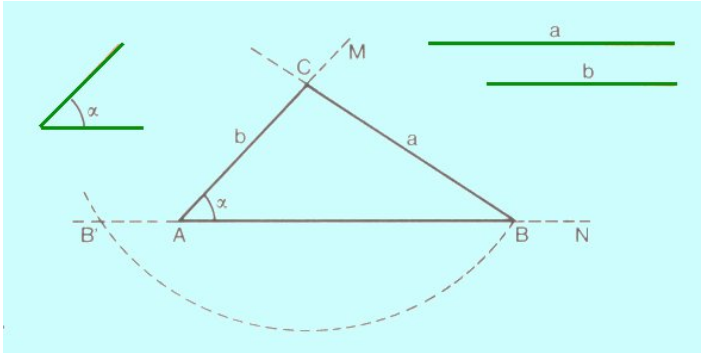
Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, la somma di due di essi deve essere minore di 180°; con questa limitazione il triangolo da costruire esiste.

- Si consideri un segmento *BC* congruente ad *a*.
- Dagli estremi *B* e *C*, dalla stessa parte rispetto al segmento *BC*, si costruiscono due angoli rispettivamente congruenti agli angoli assegnati.
- Poiché, come si è detto, la somma di tali angoli è inferiore ad un angolo piatto, le due semirette ottenute costruendo il secondo lato dei due angoli si incontreranno in un punto *A*; esso costituisce il terzo vertice del triangolo.

COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO DATI DUE LATI E L'ANGOLO OPPOSTO AD UNO DI ESSI.

Detti *a, b* i due lati ed **α** l'angolo opposto ad *a,* si distinguono tre casi.

1° *caso:* a > b

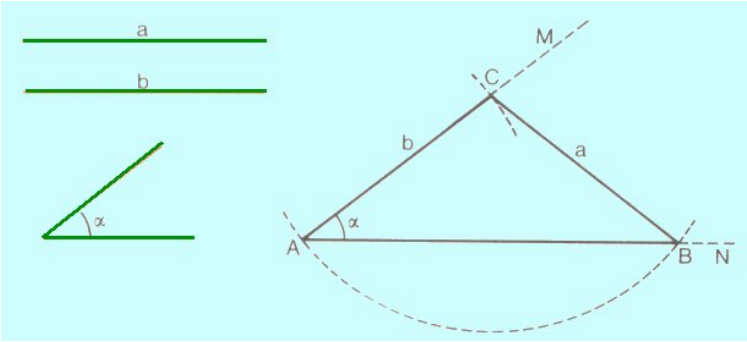


- Su una retta qualsiasi, si consideri un punto *A*. Si costruisca in *A* l'angolo uguale ad **α** (che può essere indifferentemente acuto, retto od ottuso) e sia *AM* il suo secondo lato.
- Con centro in *A* e apertura di compasso uguale a *b*, si costruisca sulla semiretta *AM* un segmento *AC* uguale a *b*.

- ❖ Facendo centro in *C,* si descriva la circonferenza di raggio *a*. Essendo *a* > *b,* tale circonferenza taglierà la retta *A N* in due punti *B, B′* situati da bande opposte rispetto ad *A*.

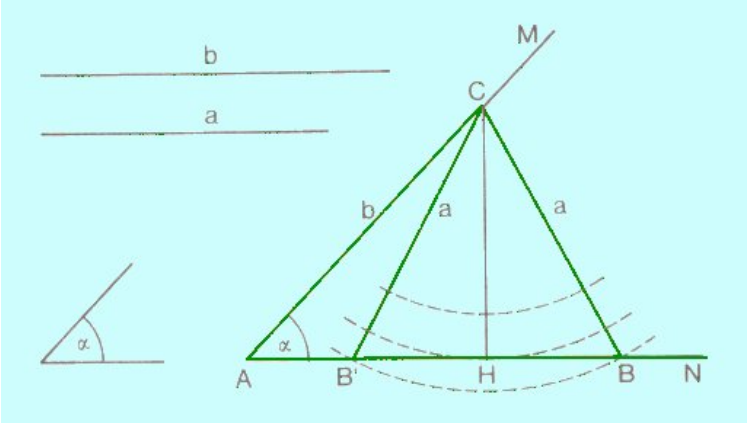
- ❖ Detto *B* il punto che, tra quelli precedentemente trovati, appartiene alla semiretta *AN,* il triangolo *ABC* è quello richiesto. La soluzione è unica.

2° *caso: a = b*



Il triangolo da costruirsi sarà isoscele ed ***α***, opposto ad uno dei lati congruenti, sarà allora un angolo alla base: il problema ammetterà quindi una soluzione solo se α è acuto.
La costruzione segue i passi del caso precedente: la circonferenza di centro *C* taglierà il lato *AN* nel punto *A* e in un altro punto *B* che individua il triangolo *ABC* cercato.

3° *caso.* Sia *a* < *b*



Il problema è risolubile solo nel caso in cui l'angolo ***α*** sia acuto; infatti, se esso fosse ottuso o retto sarebbe l'angolo maggiore del triangolo e poiché in un triangolo ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore, dovrebbe essere *a* > *b* contro i dati iniziali.

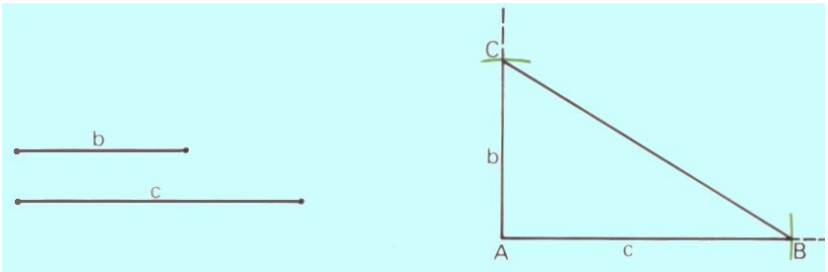
- ❖ Verificato che ***α*** sia acuto, la costruzione segue i passi illustrati nel primo caso.

- ❖ Quando si descrive la circonferenza di centro *C* possono presentarsi diverse situazioni, dovute al confronto tra il segmento ***a*** e la distanza tra il vertice *C* e la semiretta *AN*.

1) Il segmento ***a* è maggiore** della distanza *CH* del punto *C* dalla retta *AN:* allora la circonferenza taglia il lato *AN* in due punti *B, B′* situati dalla stessa parte rispetto ad *A*. Si ottengono allora i due triangoli *ABC* e *AB′C*.
2) Il segmento ***a* è uguale** alla distanza *CH:* la circonferenza risulta tangente in *H* ad *AN* e il triangolo rettangolo *AHC* è il solo che soddisfa il problema.
3) Il segmento ***a* è minore** di *CH:* il problema non ammette alcuna soluzione perché la circonferenza non incontra in alcun punto la retta *A N*.

COSTRUZIONE DI TRIANGOLI RETTANGOLI

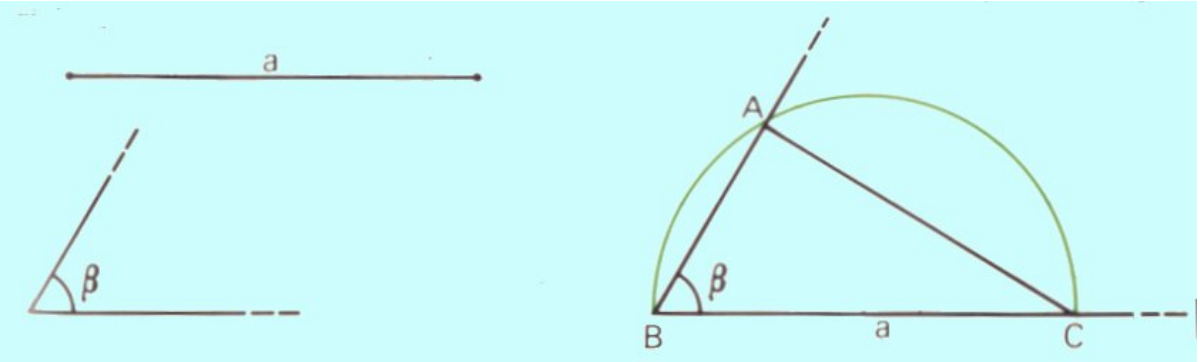
DATI I DUE CATETI



- Considerata una semiretta di origine *A*, si traccia da *A* la perpendicolare alla semiretta.
- Con centro in *A* e apertura di compasso uguale a ***b*** si descrive una circonferenza che incontra la perpendicolare disegnata in *C*.
- Con centro in *A* e apertura di compasso uguale a ***c*** si descrive una circonferenza che individua sulla semiretta iniziale il punto *B*.

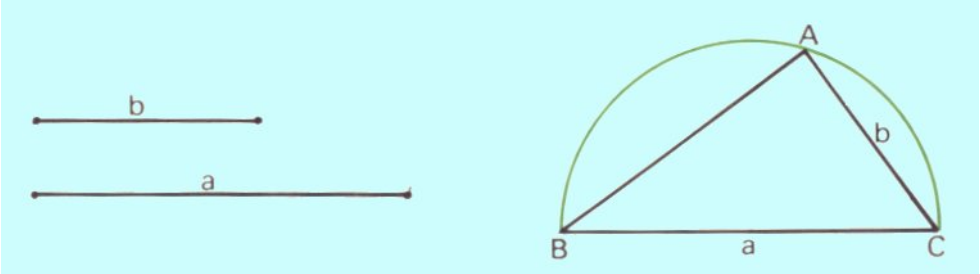
Rimangono individuati, in tal modo, i tre vertici del triangolo cercato.

DATI L'IPOTENUSA E ANGOLO ACUTO



- Data l'ipotenusa *BC*, si individui il punto medio di tale segmento.
- Con centro nel punto medio e apertura di compasso uguale a metà dell'ipotenusa, si disegni una semicirconferenza che abbia il segmento *BC* come diametro.
- Da un estremo del diametro si individui, tramite l'opportuna costruzione, la semiretta che forma con esso un angolo ***β*** congruente a quello dato.
- Il punto *A,* in cui la semiretta incontra la semicirconferenza è il terzo vertice del triangolo rettangolo richiesto.

DATI L'IPOTENUSA E UN CATETO



- Si tracci la semicirconferenza avente per diametro l'ipotenusa.
- Con apertura di compasso uguale a ***b*** e centro in *C,* estremo del diametro, si descriva una circonferenza che intersechi la semicirconferenza precedente nel punto *A*.
- Il punto *A* è il terzo vertice del triangolo.

I TEOREMI DI EUCLIDE

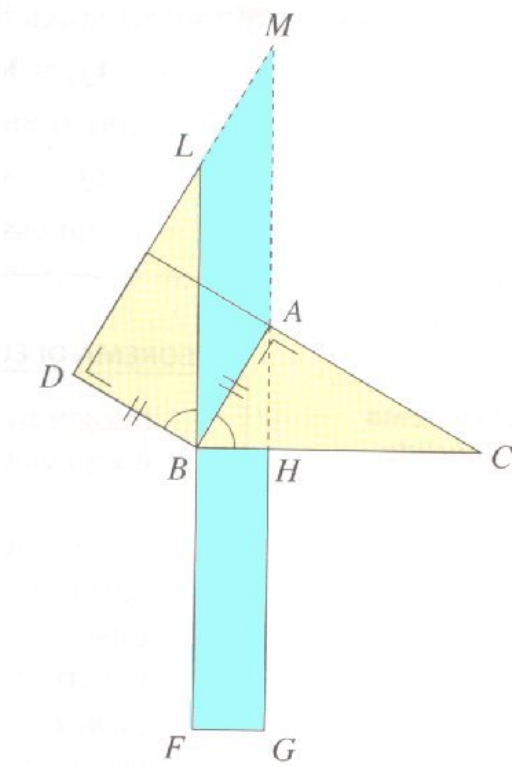
I Teorema di Euclide

Il 1° teorema di Euclide afferma che:
"in un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa ".

$$AB^2 = BC \cdot BH$$
$$AC^2 = BC \cdot HC$$

L'enunciato può essere espresso anche utilizzando le proporzioni, nel qual caso si ha:
"in un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa"

$$BC : AB = AB : BH$$
$$BC : AC = AC : HC$$



Per effettuare la costruzione si eseguono i seguenti passi:
- sia dato un qualsiasi segmento *AC* sul piano,
- per il punto *A* si tracci la perpendicolare al segmento *AC*,
- su questa retta si consideri un punto *B* a piacere,
- si unisca il punto *B* con l'altro vertice *C*: si ottiene in tal modo il triangolo *ABC*.

Occorre ora costruire il quadrato su uno dei cateti e il rettangolo sull'ipotenusa.
Per la costruzione del quadrato sul cateto *AB* si procede come segue:
- con centro in *B* e apertura di compasso uguale ad *AB* si descriva la circonferenza corrispondente,
- si traccino, dai punti *A* e *B*, le perpendicolari alla retta *AB*,
- sia *D* il punto d'intersezione tra la perpendicolare ad *AB* in *B* e la circonferenza,
- per *D* si conduca la parallela al segmento *AB*,
- tale retta interseca la perpendicolare ad *AB* in *A* in un nuovo punto;
- i due punti trovati, insieme agli estremi *A* e *B* costituiscono i vertici del quadrato costruito sul cateto *AB*.

Si deve adesso costruire il rettangolo che ha per dimensioni la proiezione di *AB* sull'ipotenusa (*BH*) e l'ipotenusa stessa (*BC*):
- con centro in *B* e apertura di compasso uguale a *BC* si disegni la circonferenza corrispondente;
- si tracci la perpendicolare per *B* al segmento *BC*,
- sia *F* il punto d'intersezione tra la retta e la circonferenza,
- per questo punto si conduca la parallela al segmento *BC*,
- tracciata, per *A,* la perpendicolare al segmento *BC*, sia *G* il punto in cui tale retta interseca la precedente;
- i due punti *F* e *G* trovati, insieme a *B* ed *H*, costituiscono i vertici del rettangolo.

Lo stesso procedimento si segue per la costruzione del quadrato costruito sull'altro cateto *AC* ed il relativo rettangolo.

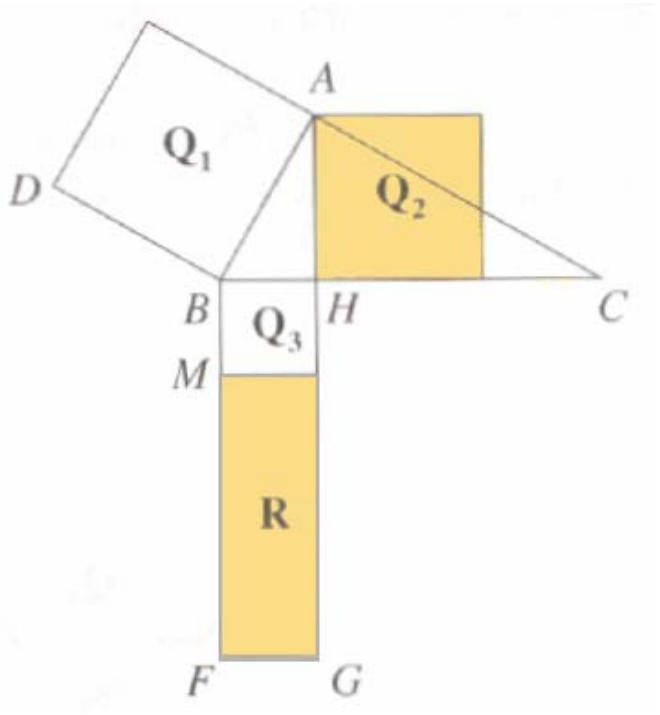
II Teorema di Euclide

Nel 2° teorema, Euclide si afferma che:
“in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa”.

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

L’enunciato relativo alle proporzioni afferma che:
“in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa é media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa"

$$BH : AH = AH : HC$$



Nell’effettuare la costruzione, si seguono i passaggi precedenti per individuare il triangolo *ABC,* poi si procede tracciando la perpendicolare per *A* all'ipotenusa *BC* in modo da determinare il punto *H* di intersezione.

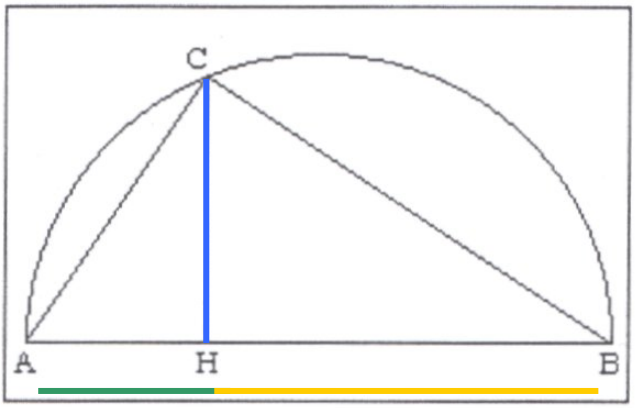
Occorre, poi, costruire il quadrato che ha per lato l'altezza *AH* relativa all'ipotenusa, indicato con $\boldsymbol{Q_2}$:
- con centro in *A* e apertura di compasso uguale ad *AH*, si disegni la circonferenza corrispondente,
- si tracci per *A* la perpendicolare ad *AH*,
- dal punto d'intersezione tra tale perpendicolare e la circonferenza, si conduca la parallela al segmento *AH*,
- considerando il punto individuato dall'intersezione con il segmento *CB*, si hanno i quattro punti che costituiscono i vertici del quadrato di lato *AH*.

Occorre adesso costruire il rettangolo che ha per dimensioni la proiezione di AB sull'ipotenusa (*BH*) e l'ipotenusa stessa (*BC*):
- Con centro in *B* e apertura di compasso uguale a *BC* si disegni la circonferenza corrispondente;
- si tracci la perpendicolare per *B* al segmento *BC*,
- sia *F* il punto d'intersezione tra la retta e la circonferenza,
- per questo punto si conduca la parallela al segmento *BC*,
- si prolunghi la perpendicolare *AH* al segmento *BC*,
- tale perpendicolare interseca la precedente parallela a *BC* nel punto *G*;
- i due punti *F* e *G* trovati, insieme a *B* e *H*, costituiscono i vertici del rettangolo.

Si deve, infine, costruire il quadrato di lato *BH,* indicato con $\boldsymbol{Q_3}$:
- con centro in *B* e apertura di compasso uguale a *BH* si disegni la circonferenza corrispondente; sia *M* il punto in cui tale circonferenza incontra il lato *BF* del rettangolo precedentemente costruito;
- da *M* si tracci la perpendicolare a *BF*;
- tale perpendicolare incontra il lato *HG* del rettangolo in un punto; questo, insieme con i punti *M*, *B*, e *H* costituiscono il quadrato.

IL SECONDO RUOLO DEI TEOREMI DI EUCLIDE: le costruzioni

I teoremi di Euclide permettono di risolvere alcuni problemi di costruzione.
Dato un segmento di lunghezza ***x*** e costruito un triangolo rettangolo in modo opportuno, con l'applicazione del ***II*** teorema di Euclide è possibile ottenere diversi segmenti.



Il triangolo rettangolo a fianco rappresentato è costruibile sia a partire dalla conoscenza dei segmenti *AH* e *HB*, sia da quella dei segmenti *AH* e *HC*.

1ª costruzione: il segmento $\sqrt{x}$

Dati *AH* e *HB*,

- si costruisce dapprima il segmento *AH* + *HB*,
- si costruisce poi la semicirconferenza di diametro *AB*;
- dal punto *H* si traccia la perpendicolare ad *AB* che incontra la semicirconferenza nel punto *C*,
- unendo *C* con *A* e con *B* si ottiene il triangolo.

Se ***AH* = 1** e ***HB* = x**,
per il secondo teorema di Euclide si ha

$$CH^2 = AH \cdot HB$$
$$CH^2 = 1 \cdot x$$
$$CH = \sqrt{x}$$

2ª costruzione: il segmento x^2

Se sono noti *AH* e *HC*,

- si utilizza la costruzione di un triangolo rettangolo noti i due cateti, determinando così il triangolo rettangolo *AHC*,
- si traccia da *C* la perpendicolare ad *AC*,
- prolungando *AH*, l'incontro di tale prolungamento con la precedente perpendicolare individua il vertice *B* del triangolo.

Se ***AH* = 1** e ***CH* = x**

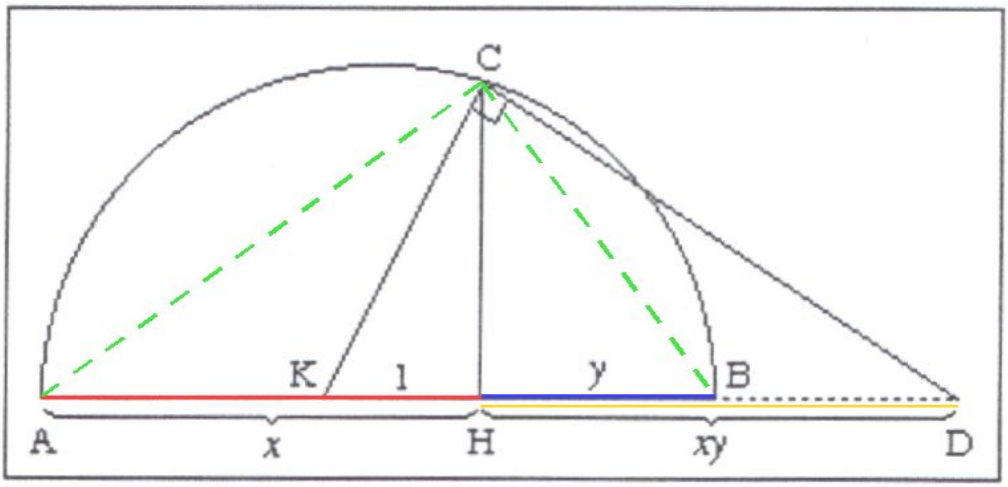
$$CH^2 = AH \cdot HB$$
$$x^2 = 1 \cdot HB$$
$$\boldsymbol{x^2 = HB}$$

3ª costruzione: il segmento $\frac{1}{x}$

Se *AH* = x e *CH* = 1

$$CH^2 = AH \cdot HB$$
$$1^2 = x \cdot HB$$
$$1 = x \cdot HB$$
$$HB = \frac{1}{x}$$

Dati, invece, due segmenti ***x*** e ***y***, è possibile realizzare un'altra costruzione per avere il segmento ***x·y***,



La costruzione si ottiene con i seguenti passaggi:

- si costruisca il segmento somma $AB = x + y$;
- si costruisca l'asse del segmento AB per determinarne il punto medio;
- con centro nel punto medio e apertura di compasso uguale alla metà di AB si tracci la semicirconferenza di diametro AB;
- dal punto H si tracci la perpendicolare ad AB;
- con centro in H e apertura di compasso uguale all'unità si tracci un arco di circonferenza che incontra AH in K;
- unito C con K, si tracci da C la perpendicolare a CK;
- sia D il punto di incontro tra tale perpendicolare e il prolungamento del diametro AB.

Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo KCD si ha:

$$HD \cdot KH = CH^2$$
$$HD \cdot 1 = CH^2$$
$$HD = CH^2$$

Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo ACB, rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza, si ha:

$$AH \cdot HB = CH^2$$
$$x \cdot y = CH^2$$

da cui:

$$\boldsymbol{HD = x \cdot y.}$$

Libro II

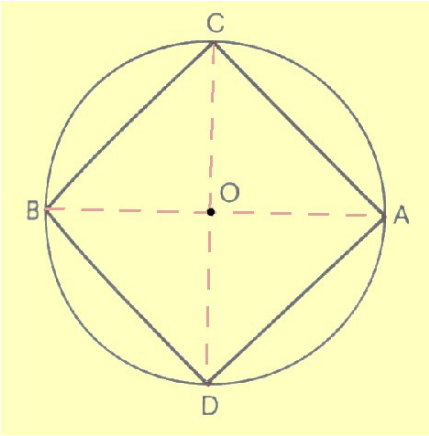
È un libro breve e il suo contenuto non compare in nessuno dei moderni manuali: l'algebra simbolica e la trigonometria, infatti, sostituiscono gli equivalenti geometrici della matematica greca. Oggi le grandezze vengono rappresentate da lettere che sono intese come numeri, conosciuti o no, sulle quali si opera con le tecniche del calcolo algebrico, ma al tempo di Euclide le grandezze erano concepite come segmenti, ed in questo senso si dice che Euclide ha trattato l'aritmetica in veste geometrica. Egli non usava espressioni del tipo " è multiplo di" o " è un fattore di" ma si serviva rispettivamente delle espressioni " è misurato da" e "misura".

Libro III e Libro IV

I due libri trattano la geometria del cerchio: vengono presentati teoremi sulle posizioni reciproche tra una retta e un cerchio e tra due cerchi, sulle proprietà delle corde e delle tangenti, sulle relazioni tra angoli e archi e tra angoli al centro e angoli alla circonferenza. La trattazione termina con i teoremi relativi a figure inscritte e circoscritte ad un cerchio.

COSTRUZIONE DEI POLIGONI REGOLARI INSCRITTI IN UNA CIRCONFERENZA

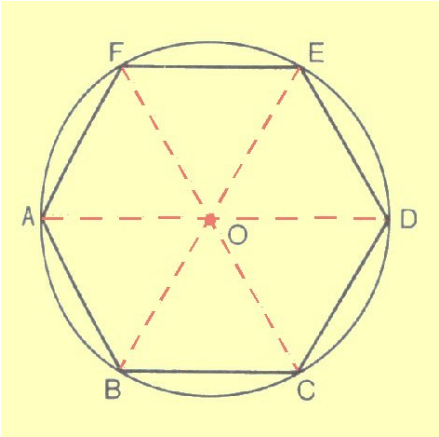
QUADRATO



Inscrivere in una circonferenza un quadrato, ossia dividere una circonferenza in quattro parti uguali.

- Si conducano due diametri perpendicolari: questi dividono la circonferenza in quattro archi congruenti, perché gli angoli al centro corrispondenti sono tutti retti e perciò tutti congruenti.
- Congiungendo i quattro punti di suddivisione si ottiene il quadrato inscritto.

ESAGONO



Inscrivere in una circonferenza un esagono regolare, ossia dividere una circonferenza in sei parti uguali.

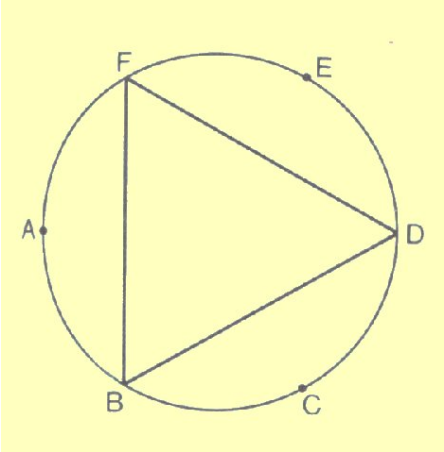
- Data la circonferenza di centro *O*, a partire da un punto qualunque *A* della circonferenza, con un'apertura di compasso uguale al raggio, si tracci un arco che incontra la circonferenza nel punto *B,*ottenendo una corda *AB*.
- Con centro in *B*, e apertura di compasso sempre uguale al raggio della circonferenza, si individui un'ulteriore punto *C,* ottenendo un'altra corda *BC* congruente alla precedente; così di seguito si costruiscano altre quattro

corde consecutive tra loro congruenti. e uguali al raggio.

- La circonferenza resta divisa in sei parti congruenti e le corde corrispondenti a tali archi costituiscono l'esagono regolare inscritto.

Data, infatti, la corda *AB* uguale al raggio, congiungendo i suoi estremi *A* e *B* col centro *O*, si ottiene il triangolo equilatero *AOB*: l'angolo in *O* misura quindi 60° e risulta perciò uguale a un sesto di angolo giro. L'arco *AB* e la corda AB da esso sottesa, ai quali corrisponde l'angolo al centro *AOB*, sono pertanto uguali a un sesto di circonferenza. Da ciò segue appunto che il lato dell'esagono regolare è uguale al suo raggio.

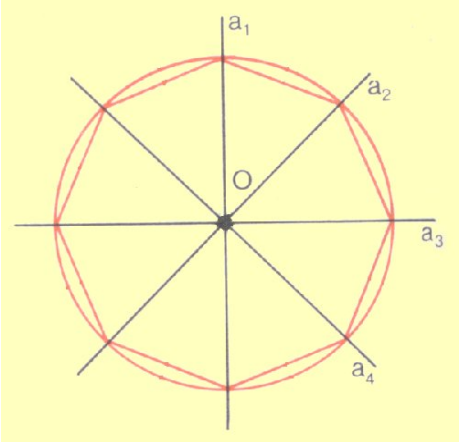
TRIANGOLO EQUILATERO



Inscrivere in una circonferenza un triangolo equilatero, ossia dividere una circonferenza in tre parti uguali.

- Si consideri la suddivisione della circonferenza in sei parti congruenti, come per la costruzione dell'esagono.
- Se si congiungono i punti di suddivisione alterni, come B, D, F, le corde che si ottengono sono congruenti; esse sono infatti sottese da archi congruenti, perché doppi di archi congruenti, perciò il triangolo *BDF* è equilatero.

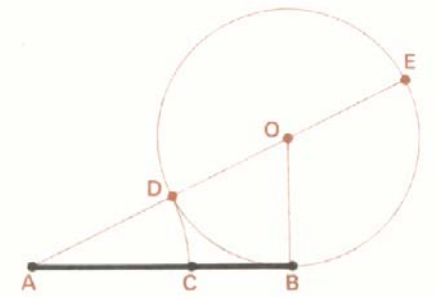
OTTAGONO



Inscrivere in una circonferenza un ottagono regolare, ossia dividere una circonferenza in otto parti uguali.

- Si consideri la suddivisione della circonferenza in quattro parti congruenti, come per la costruzione di un quadrato.
- Si traccino le bisettrici degli angoli dati.
- Se si congiungono i punti di suddivisione, le corde che si ottengono sono congruenti; esse sono infatti sottese da archi congruenti, perché metà di archi congruenti, perciò il poligono ottenuto è un ottagono regolare.

DECAGONO

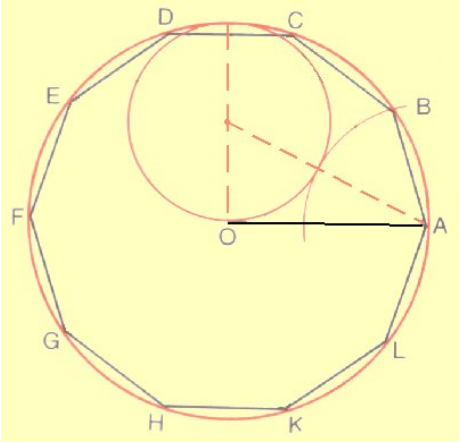


Inscrivere in una circonferenza un decagono regolare, ossia dividere una circonferenza in dieci parti uguali.

Il problema si riconduce alla determinazione della sezione aurea del raggio della circonferenza, cioè del segmento medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte

rimanente. La costruzione, già vista in precedenza, è di seguito riportata per comodità.

- Sia *AB* il segmento dato; da *B* si costruisca la perpendicolare al segmento stesso.
- Con centro in *B* e apertura di compasso congruente alla metà di *AB* si descriva una circonferenza che incontra la perpendicolare precedente in *O*.
- Con centro in *O* e stessa apertura di compasso, sempre uguale alla metà di *AB,* si descriva la circonferenza di centro *O* e raggio *OB*.
- Condotta la semiretta *AO*, siano *D ed E* le sue intersezioni con la circonferenza.

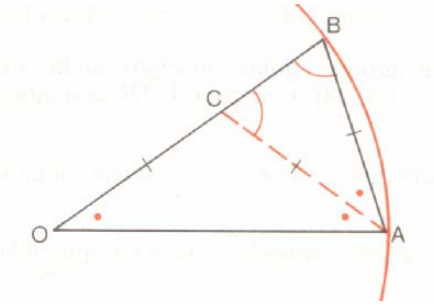


- Con centro in *A* e apertura di compasso uguale a *AD* si riporti il segmento *AD* su *AB*.
- Il punto *C* trovato individua su *AB* il segmento *AC* che è la sua parte aurea.

La sezione aurea del raggio di una circonferenza è il lato del decagono regolare in essa inscritto

Infatti: sia *AB* il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro *O* e raggio *OA*. L'angolo *AOB* sarà uguale a

1/10 di angolo giro,
cioè a
1/5 di angolo piatto.



Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo misura quanto un angolo piatto e poiché il triangolo *AOB* è isoscele, la somma degli angoli alla base misurerà i rimanenti 4/5 di angolo piatto e ciascuno di essi corrisponderà a

2/5 di angolo piatto.

Si conduca ora la bisettrice *AC* dell'angolo *OAB*: ciascuno dei due angoli *OAC* e *CAB* risulterà uguale a

1/5 di angolo piatto.

Il triangolo *ACO* risulta isoscele, perché gli angoli *COA* ed *OAC,* essendo ciascuno 1/5 di angolo piatto, sono uguali e perciò *OC* = *AC*.
Anche il triangolo *BAC* è isoscele, perché gli angoli *ABC* e *ACB* sono ambedue uguali a 2/5 di angolo piatto, quindi è *AC* = *AB*.
In tal modo, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, si ha pure *OC* = *AB*.
Si osservi ora che, per il teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo, il quale afferma che la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto all'angolo in parti proporzionali agli altri due lati, si ha:

$$AO : AB = OC : BC.$$

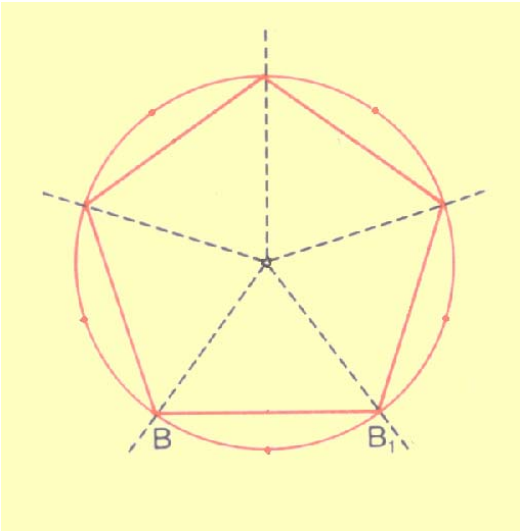
Poiché $AO = OB$ e $AB = OC$, sostituendo si ha:

$$OB : OC = OC : BC.$$

Questa proporzione indica che OC è la sezione aurea di OB.

Poiché $OC = AB$ si conclude che anche AB, lato del decagono regolare, è la sezione aurea del suo raggio.

PENTAGONO



Inscrivere in una circonferenza un pentagono regolare, ossia dividere una circonferenza in cinque parti uguali

- Si consideri la suddivisione della circonferenza in dieci parti congruenti, come per la costruzione di un decagono.
- Se si congiungono i punti di suddivisione in modo alterno, le corde che si ottengono sono congruenti; esse sono infatti sottese da archi congruenti, perché doppi di archi congruenti, perciò il poligono ottenuto è un pentagono regolare.

IL PENTADECAGONO

Il problema della costruzione del pentadecagono si risolve con la costruzione di un arco uguale a $\frac{1}{15}$ di circonferenza.

A questo scopo si può osservare che, inscrivendo in una stessa circonferenza un esagono ed un decagono regolari, se si sottrae dall'arco sotteso dal lato dell'esagono regolare l'arco sotteso dal lato del decagono regolare si ottiene:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Riportando, quindi, sulla circonferenza l'arco corrispondente a tale differenza si ottiene una suddivisione della stessa in 15 parti congruenti.

CICLOTOMIA

Prende questo nome il problema che consiste nel suddividere una data circonferenza in un numero ***n*** di parti uguali; vocabolo derivante dalle parole greche ***ciclo*** = cerchio e ***temno*** = taglio. Il problema è equivalente, come si è visto attraverso le precedenti costruzioni, a quello di costruire un poligono regolare di n lati.

I Greci, con il solo uso della riga e del compasso, riuscirono a risolvere questo problema per alcuni casi particolari.

1. Considerando la costruzione di un quadrato inscritto, la circonferenza risulta divisa in
$$4 = 2^2$$
parti congruenti.
La costruzione delle bisettrici dei quattro angoli retti permette di ottenere un ottagono regolare, quindi la circonferenza risulta divisa in
$$8 = 2^3$$
parti congruenti.
Le bisettrici degli otto angoli ottenuti, insieme con i lati degli angoli stessi dividono la circonferenza in
$$16 = 2^4$$
angoli congruenti.
Proseguendo in queste successive bisezioni degli angoli al centro ottenuti, si arriva a dividere la circonferenza in un numero di parti uguali corrispondente a tutte le potenze di 2,

$2,\quad 4 = 2^2,\quad 8 = 2^3,\quad 16 = 2^4,\quad 32 = 2^5,\quad 64 = 2^6,\quad 128 = 2^7,\quad 256 = 2^8,\quad 512 = 29,\quad 1024 = 2^{10}$
e così via, ossia in un numero
$$\mathbf{n = 2^k}$$
di parti congruenti.

2. Per dividere la circonferenza in 3 parti uguali si costruisce l'esagono regolare in essa inscritto e si uniscono alternativamente i vertici di tale poligono.
Partendo dal triangolo e considerando di bisecare i tre angoli ottenuti, si ha una suddivisione della circonferenza in
$$6 = 3 \cdot 2$$
parti uguali.
Costruendo le bisettrici di tali angoli si ottiene una suddivisione in
$$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2$$
parti uguali.
Bisecando nuovamente gli angoli si ottiene una suddivisione in
$$24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2^3$$
Con una successiva bisezione si ottengono
$$48 = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 2^4$$
parti congruenti.

Proseguendo, si arriva ad una suddivisione della circonferenza in un numero

$$\mathbf{n = 3 \cdot 2^k}$$
di parti congruenti.

3. La divisione della circonferenza in 5 parti uguali si ottiene con l'iniziale costruzione della parte aurea del raggio, quindi, con la costruzione del decagono regolare inscritto del quale poi si uniscono alternativamente i vertici.
   Partendo dal pentagono e considerando di bisecare gli angoli al centro ottenuti, si ottiene una suddivisione della circonferenza in
   $$10 = 5 \cdot 2$$
   parti uguali.
   Costruendo le bisettrici di tali angoli si ottiene una suddivisione in
   $$20 = 5 \cdot 4 = 5 \cdot 2^2.$$
   parti uguali.
   Bisecando nuovamente gli angoli si ottiene una suddivisione in
   $$40 = 5 \cdot 8 = 5 \cdot 2^3.$$
   Con una successiva bisezione si ottengono
   $$80 = 5 \cdot 16 = 5 \cdot 2^4$$
   parti congruenti.

   Proseguendo, si arriva ad una suddivisione della circonferenza in un numero
   $$\mathbf{n = 5 \cdot 2^k}$$
   di parti congruenti.

4. Partendo dalla costruzione del pentadecagono e operando successive bisezioni degli angoli al centro, si ottiene una suddivisione della circonferenza in
   $$30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$$
   parti uguali,
   poi,
   $$60 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 2^2$$
   parti uguali,
   poi,
   $$120 = 3 \cdot 5 \cdot 8 = 3 \cdot 5 \cdot 2^3$$
   e così via.
   Proseguendo, si arriva ad una suddivisione della circonferenza in un numero
   $$\mathbf{n = 3 \cdot 5 \cdot 2^k}$$
   di parti congruenti.

Si pone, quindi, il problema di vedere se, qualunque sia l'intero n, si possa sempre dividere la circonferenza in n parti uguali, facendo il solo uso della riga e del compasso.

I greci costruirono poligoni regolari con ***3***, ***4***, ***5***, ***6***, ***8***, ***10*** e ***15*** lati, ma non con

7 ***9*** ***17***

lati; né sapevano per quali ***n*** fosse possibile la ciclotomia.
Anzi, non si ebbe alcun progresso nella risoluzione del problema sino a quando la questione venne risolta da Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855,) il quale provò che la suddivisione è possibile solo per particolari valori di n.

Uno dei maggiori matematici di tutti i tempi,tanto da guadagnarsi il riconoscimento di ***priceps mathematicorum***, Gauss nacque a Braunschweig nel 1777 da famiglia poverissima. Il padre muratore e giardiniere era un uomo assolutamente probo ma tirannico e rozzo. La madre, intelligente e di carattere; era figlia di un

tagliatore di pietre e sembra fosse analfabeta. Ella adorava il figlio come pure suo fratello, maestro nella tessitura di finissimi damaschi, che fu certamente tra i primi a riconoscere l'intelligenza fuori dal comune del nipote. Gauss diede prova fin dall'infanzia di ingegno vivacissimo, distinguendosi particolarmente nel calcolo numerico. Nel 1795 si recò a Gottinga dove si entusiasmò nello studio delle opere di Eulero e di Lagrange. Con l'aiuto finanziario del duca di Hannover, che gli permise di studiare, nel 1795 entrò all'Università di Gottinga e durante questo periodo scrisse le *Disquisitiones Arithmeticae*, grandioso studio sulla teoria dei numeri. Nel 1807 venne nominato direttore dell'Osservatorio astronomico di Gottinga e professore di astronomia presso la stessa università; incarichi che mantenne sino alla morte avvenuta nel 1855. Egli fu il primo matematico a comprendere con chiarezza la non dimostrabilità del V postulato di Euclide e ad ipotizzare l'esistenza delle geometrie non euclidee, ma non rese mai noti i suoi studi perché riteneva i tempi non ancora maturi per poter accettare simili idee. Non molto comunicativo dal punto di vista umano, dal punto di vista sociale era un conservatore e piuttosto isolato sotto l'aspetto intellettuale: forse, questo suo atteggiamento era anche dovuto all'incredibile gamma di idee che maturavano nel suo cervello e che lo portavano a distogliersi molto raramente dai suoi studi. Egli contribuì in modo notevole alle diverse discipline scientifiche e percepì con estrema chiarezza le profonde connessioni tra i diversi rami del sapere scientifico.
Gauss osservò che già i matematici greci riuscivano ad eseguire la ciclotomia per valori corrispondenti a numeri del tipo 2^k, $3\cdot 2^k$, $5\cdot 2^k$ e del tipo$3\cdot 5\cdot 2^k$ e riuscì a generalizzare questi risultati utilizzando, allo scopo, i ***Numeri di Fermat***.
Un ***numero di Fermat*** è ogni numero **primo** che si può scrivere nella forma

$$2^{2^k} + 1 \text{ con } \mathbf{k} = 0, 1, 2, 3, 4,$$

ossia i numeri ottenuti come particolari potenze di 2, aumentate di 1 unità.
I soli numeri di Fermat noti a tutt'oggi sono:

$$3 \quad 5 \quad 17 \quad 257 \quad 65.537.$$

Fermat congetturò che tutti i numeri della forma $\mathbf{F}n=2^n+1$, essendo $\mathbf{n}=2^{\mathbf{k}}$ con $\mathbf{k}=0,1,2,\ldots$, fossero primi, ma nel 1732 ***Eulero*** provò invece che $F_5=4.294.967.297$ non era primo, utilizzando allo scopo, ironia della sorte, un metodo inventato proprio da Fermat.
Oggi si cerca la dimostrazione della congettura opposta, ovvero che tutti i numeri ***F*n**, con **n>*4***, sono composti.

Nel 1801 Gauss dimostrò che, a parte il caso in cui n sia esprimibile come una qualsiasi potenza di 2,
"Condizione necessaria e sufficiente affinché una circonferenza possa essere divisa in un numero n di parti uguali con riga e compasso, è che, scomposto n in fattori primi,

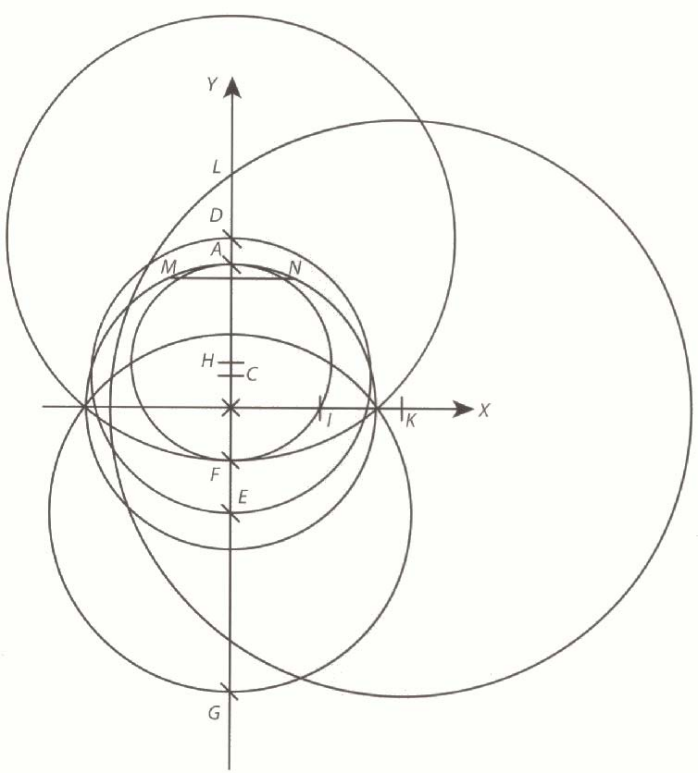
1) SE ***n*** è PRIMO
   esso deve essere della forma $2^{2^k} + 1$, con k numero naturale
2) SE ***n*** NON è PRIMO
   esso deve potersi esprimere come prodotto di una qualsiasi potenza di 2 e di un numero di fattori primi tra loro distinti, ciascuno espresso nella forma $2^{2^k} + 1$; quindi per numeri la cui suddivisione in fattori primi risulti del tipo

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n,$$

dove m≥0, ed i p_i sono distinti numeri di Fermat."

In altre parole, tali fattori, ad esclusione del 2 che può comparire con qualsiasi potenza, si devono presentare tutti al primo grado e devono essere tutti numeri primi del tipo di Fermat.
Sono dunque costruibili poligoni regolari di

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 1,7 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64,* 96, 257, *65537 lati, ma non, ad esempio, di *7*, 14, 9 o 23 lati.



Nel 1796 Gauss stesso dichiarava la costruibilità del poligono di 17 lati, evento che riscosse un vero successo e fu accolto con grande entusiasmo. Gauss fu talmente orgoglioso della sua scoperta che disse all'amico Farkas Bolyaj di voler scolpito tale poligono sulla sua tomba. In realtà ciò non venne fatto, ma sul monumento a Gauss, eretto nella sua cittadina natale a Braunschweig, è incisa una stella a 17 punte. Esiste una versione semplificata di tale costruzione presentata da H. Richmond nel 1893; nel tempo, poi, sono stati presentati altri tipi di costruzioni.
Il poligono regolare di 257 lati fu studiato da Friedrich Julius Richelot (1808 – 1857) in un articolo di 194 pagine.
Hans Hermes fornì, invece, una prima descrizione dettagliata del poligono di 65.537 lati, in seguito a dieci anni di lavoro ed una produzione di appunti che occupava un intero baule.

I problemi classici riguardanti la "Duplicazione del cubo", la "Quadratura del cerchio" e la "Trisezione dell'angolo" erano problemi nati dall'obiettivo dei matematici greci di operare costruzioni elementari con il solo uso della riga e del compasso.
Eseguire operazioni di questo tipo significa considerare, su un piano cartesiano ortogonale, solamente enti quali:

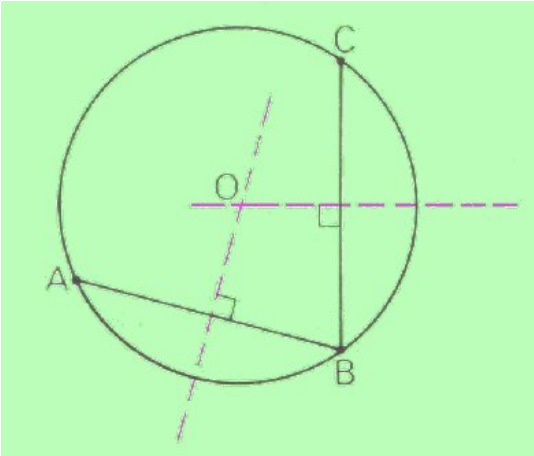
- PUNTI, individuati e caratterizzati da una coppia di numeri detti coordinate P(x, y),
- RETTE, caratterizzate da espressioni lineari della forma $ax + by + c = 0$,
- CIRCONFERENZE, caratterizzate da espressioni di secondo grado del tipo

$$X^2 + Y^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma = 0.$$

In altre parole, gli enti geometrici costruibili con riga e compasso corrispondono, dal punto di vista algebrico, a quelle entità matematiche che possono essere ricavate dai dati del problema con l'uso ripetuto delle quattro operazioni fondamentali di somma, sottrazione, prodotto e quoziente e estrazione di radici quadrate sulle espressioni precedenti.
L'espressione algebrica in tal modo ottenuta si dice *risolubile per radicali* e le sue soluzioni si dicono *costruibili*.
Il grande genio matematico Évariste Galois (1811 – 1832), morto prematuramente a 20 anni in un duello che pose fine ai suoi straordinari studi, esaminando il problema delle equazioni risolubili per radicali, stabilì che condizione necessaria affinché una certa quantità ***x*** fosse costruibile con riga e compasso è che essa fosse soluzione di un'equazione di grado 2.
Da questo solo fatto segue immediatamente che la soluzione dei due problemi classici riguardanti la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo non potevano essere risolti in tal modo, così come non è risolubile in generale la costruzione con riga e compasso di poligoni regolari con un qualsiasi numero n di lati.

COSTRUZIONI relative ad una CIRCONFERENZA

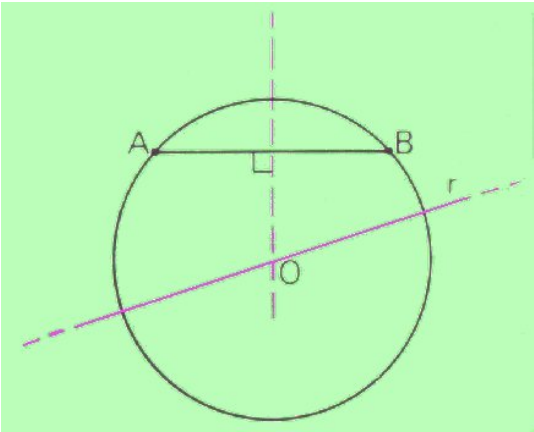
COSTRUIRE UNA CIRCONFERENZA PASSANTE PER TRE PUNTI ASSEGNATI



Ciò che occorre determinare è il punto dove puntare col compasso, ossia il centro della circonferenza, e l'apertura da dargli, cioè il raggio.
Il centro *O* deve essere equidistante dai tre punti *A, B* e *C*; pertanto deve appartenere sia all'asse del segmento *AB*, sia a quello del segmento *BC*, cioè all'intersezione dei due assi, mentre il raggio sarà $OA = OB = OC$
Quindi occorre:

- unire *B* con *A* e con *C*,
- costruire gli assi dei due segmenti *AB* e *BC*, corde della circonferenza.
- Poiché in una circonferenza gli assi delle corde passano per il centro, il punto di intersezione di tali assi è il centro della circonferenza.
- Con centro in *O* e apertura di compasso uguale a *OA* si descrive la circonferenza cercata.

COSTRUIRE UNA CIRCONFERENZA CHE PASSI PER DUE PUNTI *A* e *B* CHE ABBIA IL CENTRO *O* SU UNA RETTA *r* DATA.

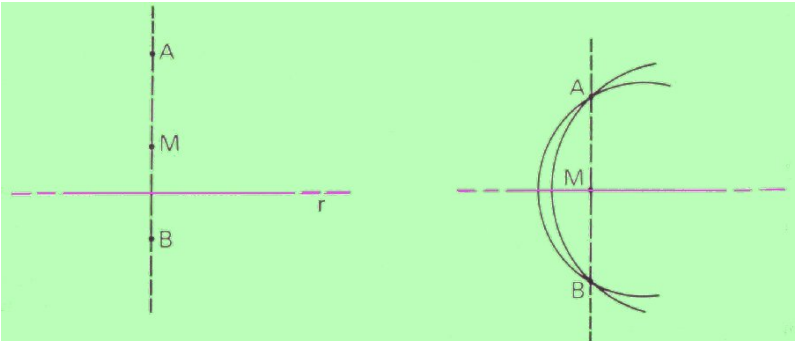


Il segmento *AB* deve essere una corda della circonferenza cercata e poiché il suo asse passa per il centro della circonferenza, questo può essere determinato come intersezione dell'asse di *AB* con la retta *r* data. È necessario, quindi:

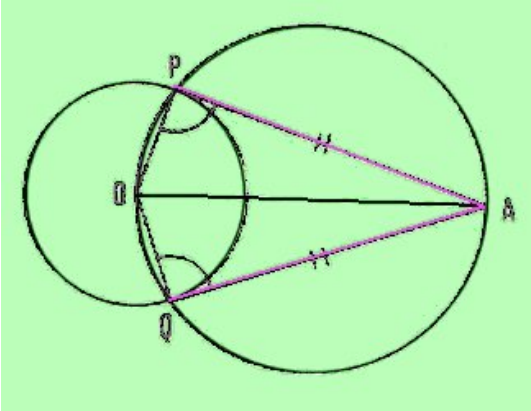
- unire *A* con *B* e determinare l'asse del segmento *AB*, corda della circonferenza;
- il punto d'intersezione tra l'asse e la retta *r* data rappresenta il centro della circonferenza.
- Con centro in *O* e apertura di compasso uguale a *OA* si descrive la circonferenza.

Analizzando le varie posizioni di ***r*** rispetto ad *AB* si può osservare che:

1. se ***r*** è parallela all'asse, ossia perpendicolare alla corda e non passante per un suo punto medio, non vi è intersezione e non è possibile determinare il centro *O* della circonferenza.
2. se ***r*** coincide con l'asse si avranno infinite circonferenze, tutte passanti per *A* e per *B* e ciascuna avente per centro un punto dell'asse.



COSTRUIRE LE TANGENTI AD UNA CIRCONFERENZA PER UN PUNTO DATO *A* AD ESSA ESTERNO



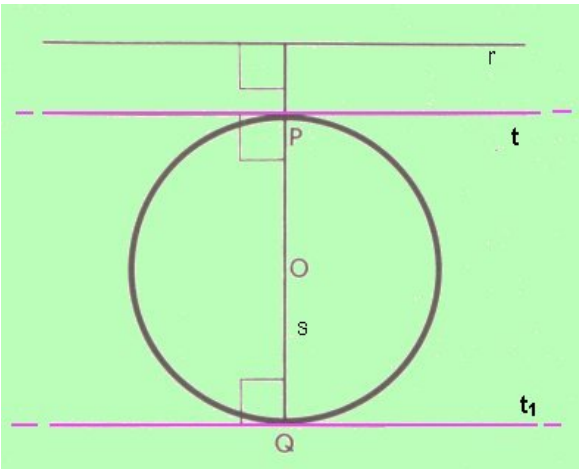
- Data la circonferenza di centro *O*, si unisce *O* con il punto esterno *A*.
- Si determina il punto medio del segmento *OA*
- Con centro nel punto medio e apertura di compasso uguale a metà del segmento *OA* si descrive una circonferenza che incontra la circonferenza data in due punti *P* e *Q*.
- Si unisce *A* con *P* e con *Q*. Le rette *AP* e *AQ* sono le tangenti richieste.

Infatti, una retta è tangente ad una circonferenza quando la sua distanza dal centro è congruente al raggio della circonferenza stessa.
Dalla precedente costruzione risulta che i triangoli *OAP* e *OAQ* sono rettangoli in quanto inscritti in una semicirconferenza; inoltre, poiché da un punto esterno ad una retta esiste una ed una sola perpendicolare ad una retta data, *OP* e *OQ*, raggi della circonferenza iniziale, sono le distanze di *O* dalle due rette.

Da tale costruzione seguono anche altre proprietà:

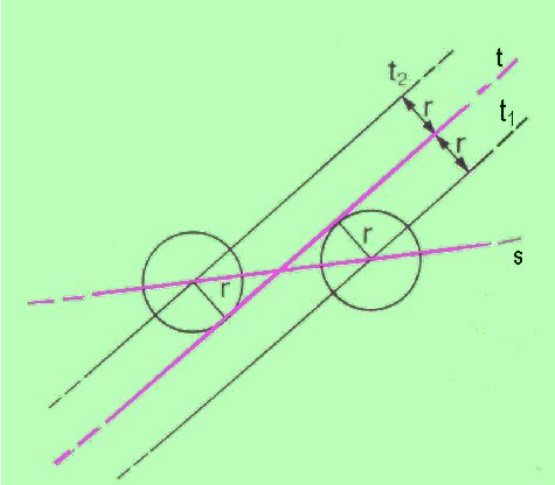
1. I segmenti di tangente compresi tra il punto esterno e i punti di tangenza sono congruenti tra loro.
2. La congiungente il centro della circonferenza con il punto esterno è bisettrice sia dell'angolo in *A*, formato dall'incontro delle due tangenti, sia dell'angolo in *O*, formato dai raggi condotti ai punti di tangenza.
3. La congiungente *OA* è asse della corda *PQ*, avente per estremi i punti di tangenza.

COSTRUIRE UNA RETTA t DI DATA DIREZIONE e TANGENTE AD UNA CIRCONFERENZA DATA.



- Data la circonferenza di centro *O*, si tracci la retta ***s*** perpendicolare ad ***r*** e passante per *O*.
- Detti *P* e *Q* i punti di intersezione della circonferenza con la retta s, essi rappresentano i punti di tangenza.
- Da *P* e da *Q* si traccino, quindi, le parallele alla retta r data.

COSTRUIRE UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO *r* CHE SIA TANGENTE AD UNA DATA RETTA *t* E ABBIA IL CENTRO SU UN'ALTRA RETTA DATA *s*.

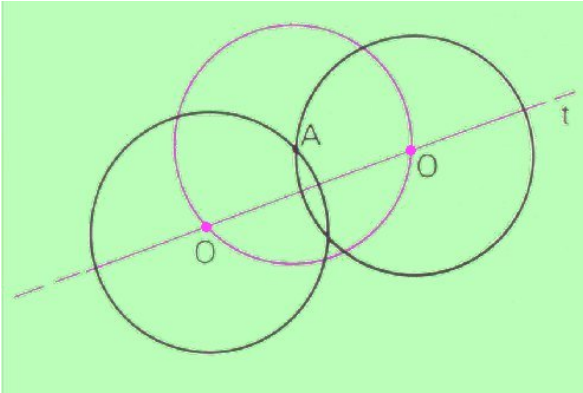


Il centro della circonferenza deve avere dalla retta ***t*** distanza uguale al raggio, per cui si troverà su una delle due rette t_1 e t_2 parallele e ***t*** che distano ***r*** da essa. Le intersezioni di t_1 e t_2 con ***s*** indicano dove si deve far centro con il compasso per disegnare la circonferenza cercata.

- Preso un qualunque punto su ***t***, si tracci la perpendicolare a ***t*** passante per il punto scelto.
- Con centro nel punto precedente e apertura di compasso uguale a *r*, si traccino due archi di circonferenza che individuano sulla perpendicolare due punti, a distanza *r* da ***t***, da parte opposte rispetto a ***t***.
- Da tale punti si traccino le parallele t_1 e t_2 a ***t***.
- Le intersezioni di t_1 e t_2 con ***s*** sono i centri delle circonferenze cercate.
- Con centro in tali punti e apertura di compasso uguale al raggio si traccino le circonferenze richieste.

Si può osservare che se le rette ***s*** e ***t*** sono tra loro parallele e loro distanza è maggiore di *r* non è possibile determinare le circonferenze; se la loro distanza è uguale ad *r* si avranno infinite circonferenze il cui centro appartiene ad *s* e la cui tangente è la retta ***t*** data.

COSTRUIRE UNA CIRCONFERENZA di RAGGIO *r* CHE PASSI PER UN PUNTO DATO *A* E CHE ABBIA IL CENTRO SU UNA RETTA DATA *t*.

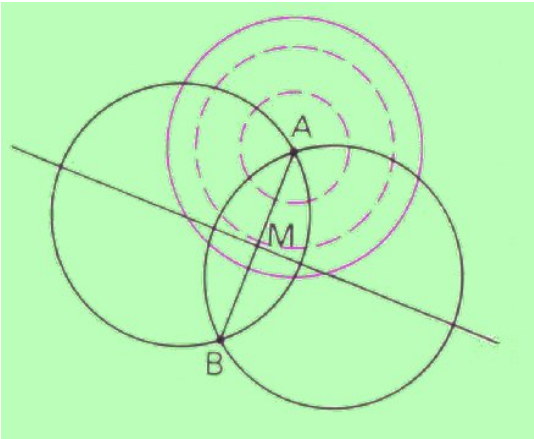


Basta trovare, se c'è, un punto di ***t*** che abbia distanza *r* da *A*.

- Si descriva la circonferenza di centro *A* e raggio *r*.
- Gli eventuali punti d'intersezione di essa con la retta ***t*** sono i centri delle circonferenze cercate.

Si può osservare che se la distanza di ***t*** da *A* è uguale ad *r* la circonferenza di centro *A* è tangente a ***t***, quindi si ottiene un solo punto *O* di intersezione ed una sola circonferenza che risulterà tangente a ***t***.

COSTRUIRE UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO *r* PASSANTE PER DUE PUNTI DATI *A* e *B*.

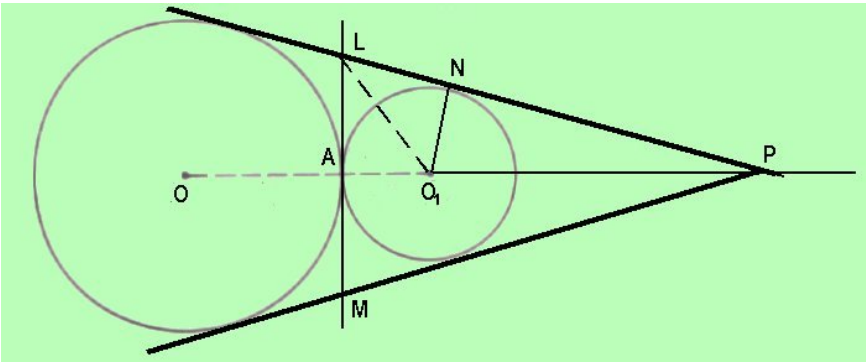


Il centro della circonferenza sarà sull'asse del segmento *AB*, per cui basta trovare un punto di esso che abbia distanza *r* da *A*, per avere il centro della circonferenza richiesta.
Tracciata una circonferenza di centro *A* e raggio *r* si ottengono due punti di intersezione, un solo punto di intersezione o nessuno, a seconda che *r* sia maggiore, uguale o minore della semidistanza *AB*.

- Si congiunga *A* con *B* e si costruisca l'asse del segmento *AB*.
- Con centro in *A* e apertura di compasso uguale al raggio *r* si descriva una circonferenza.
- Gli eventuali punti d'intersezione di tale circonferenza con l'asse di *AB* sono i centri delle circonferenze richieste.
- Con centro in tali punti e apertura di compasso uguale ad *r* si descrivano le circonferenze.

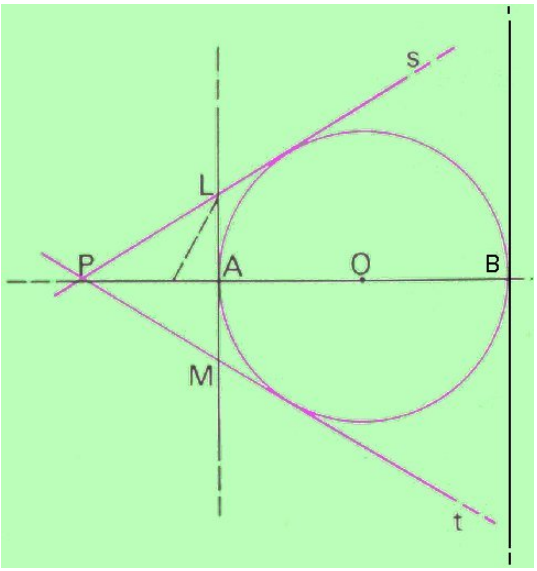
COSTRUIRE UNA CIRCONFERENZA TANGENTE SIA AD UNA CIRCONFERENZA DATA SIA ALLE TANGENTI *s* E *t* A QUEST'ULTIMA, USCENTI DA UN PUNTO *P*.

Prima di procedere alla costruzione è opportuno eseguire alcune osservazioni su quella che sarebbe la figura già completa.



Per quanto già detto, poiché le due rette *s* e *t*, tangenti alla circonferenza data di centro *O*, sono anche le tangenti alla circonferenza da determinare, il centro della nuova circonferenza sarà sulla retta *OP*, bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti.
Si può poi considerare che il punto *A* di tangenza delle due circonferenze è individuato dall'intersezione della retta *OP* con la circonferenza iniziale, quindi, una volta noto il centro, la distanza tra tale centro e il punto *A* permette di individuare il raggio.
Per determinare la posizione del centro della nuova circonferenza si può osservare che l'ulteriore tangente comune alle due circonferenze è la perpendicolare a *PO* passante per *A*. Se tale retta incontra le tangenti inizialmente assegnate nei punti *L* ed *M*, ciascuno di essi rappresenta un punto esterno dal quale è possibile pensare di tracciare altre due tangenti, *LN* e *LA*, alla circonferenza da determinare. Per tale motivo, anche la bisettrice dell'angolo in *L* contiene il centro e la sua intersezione con *PO* ne determina la posizione.
Per ciò che riguarda la costruzione si hanno i seguenti passaggi.

- Si unisca *O* con *P* e dal punto *A* di intersezione tra tale congiungente e la circonferenza assegnata si tracci la perpendicolare ad *OP*.

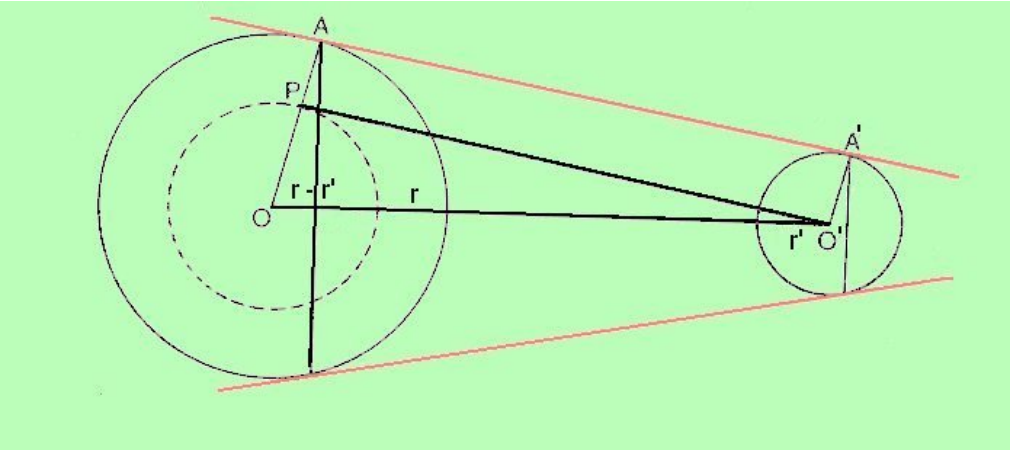


- Detto *L* il punto di intersezione con *s*, si costruisca la bisettrice dell'angolo in *L*.
- Il punto di intersezione di tale bisettrice con la retta *OP* rappresenta il centro della nuova circonferenza.
- Con centro in tale punto e apertura di compasso uguale alla distanza tra esso e il punto *A* si descriva la circonferenza richiesta.
- La stessa costruzione può essere ripetuta tracciando la tangente alla circonferenza assegnata nell'altro suo punto *B* d'incontro con la retta *OP*.

COSTRUZIONE DELLE TANGENTI COMUNI A DUE CIRCONFERENZE.

Siano date due circonferenze esterne di centri *O* ed *O'* e raggi rispettivamente *r* ed *r'*, con $r > r'$.
Si vogliono costruire le tangenti comuni alle due circonferenze.
Poiché le circonferenze hanno un comune asse di simmetria, è possibile esaminare il procedimento di costruzione per una tangente, ottenendo poi l'altra come simmetrica della prima rispetto all'asse *OO'*.
Dal momento che le circonferenze sono esterne, si devono considerare due casi, a seconda che le due tangenti comuni si incontrino sul prolungamento di *OO'* oppure sul segmento *OO'*.

1° caso: le tangenti si incontrano sul prolungamento di *OO'*



In questo primo caso si traccia una circonferenza ausiliaria di centro *O* e di raggio *r- r'*.
Si traccia quindi la tangente da *O'* alla circonferenza ausiliaria, utilizzando la costruzione della tangente ad una circonferenza da un punto esterno, determinando così il punto di tangenza *P* .
La perpendicolare nel punto *A* di intersezione tra la retta *OP* e la circonferenza di centro *O* è la tangente comune richiesta. Infatti, se da *O'* si conduce la perpendicolare ad essa, che la incontri in un punto A', si ottiene un rettangolo *O'PAA'* in cui è *O'A' = PA = r'*: perciò *A'* è un punto della circonferenza di centro *O'* e precisamente è il punto di tangenza perché è il piede della retta *AA'* perpendicolare al raggio.

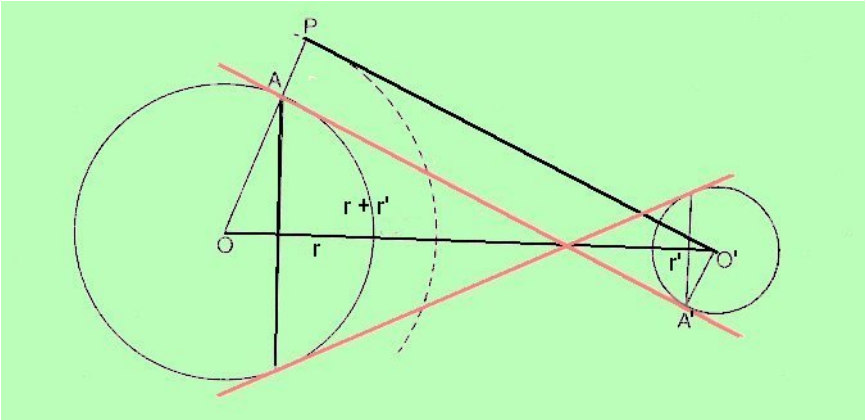
- Con centro in *O* e apertura di compasso uguale a *r – r',* si tracci la circonferenza ausiliaria di tale raggio.

- Procedendo con la costruzione della tangente da un punto esterno *O'* ad una circonferenza, si individui il punto *P* di tangenza e sia *A* il punto di intersezione del prolungamento di *OP* con la circonferenza di centro *O* e raggio *r*.

- Per *A* si tracci la perpendicolare ad *OA* che incontra la circonferenza di centro *O'* e raggio *r'* in *A'*.

- La retta *AA'* è la tangente richiesta.

2° caso: le tangenti si incontrano sul segmento *OO'*



In questo secondo caso si traccia una circonferenza ausiliaria di centro *O* e di raggio *r + r'* e il ragionamento, come anche i punti della costruzione, è analogo a quello precedente.

Se le circonferenze sono tangenti esterne è possibile solo la costruzione del primo caso, mentre la tangente comune passante per il punto di contatto delle due circonferenze si ottiene tracciando la perpendicolare alla congiungente i loro centri nel punto di contatto.

Se le circonferenze sono secanti è possibile solo la costruzione del primo caso, cioè con la circonferenza ausiliaria di centro *O* e raggio *r - r'*.

Se le circonferenze sono una interna all'altra, la costruzione è impossibile in entrambi i casi e non esistono tangenti comuni.

Libro V

Il quinto libro riguarda la teoria delle proporzioni.
La scoperta delle grandezze incommensurabili provocò forti dubbi, dal punto di vista logico, su ogni dimostrazione che facesse ricorso all'idea di proporzione. Eudosso di Cnido risolse la questione, ma i greci ebbero la tendenza a non utilizzare le proporzioni e così pure Euclide. Egli le evitò il più possibile, interpretando la proporzione $x : a = b : c$ come un'uguaglianza tra aree, ossia $x \cdot c = a \cdot b$, ma, rendendosi conto che il loro utilizzo era inevitabile, le trattò compiutamente. Questo Libro, come già il II, è stato sostituito dall'algebra attuale, ma in esso sono contenuti concetti base quali le odierne proprietà distributive sinistra e destra della moltiplicazione rispetto all'addizione e la proprietà associativa della moltiplicazione.

Libro VI

Il libro contiene teoremi relativi a rapporti e proporzioni concernenti triangoli, parallelogrammi o altri poligoni simili, quindi è usato liberamente il concetto di proporzione e quello di similitudine ad essa strettamente legato.

I libri VII – VIII – IX sono dedicati alla teoria dei numeri che oggi si chiamano naturali.

Libro VII

Il libro VII si apre con una serie di definizioni che distinguono vari tipi di numeri: dispari e pari, primi e composti, piani e solidi, ossia quelli ottenuti dal prodotto di due o tre numeri. Tutti i teoremi trattati utilizzano un linguaggio in cui ciascun numero è rappresentato da un segmento.
È in questo contesto che viene introdotto il famoso algoritmo euclideo per la determinazione del MCD tra due numeri.

Libro VIII

Il libro VIII, il meno interessante dell'opera, presenta una serie di proposizioni concernenti numeri in progressione geometrica.

Libro IX

Il nono libro contiene diversi teoremi d'interesse particolare, tra questi il teorema che afferma:

I numeri primi sono più di una qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi,

ossia, i numeri primi sono infiniti.
La dimostrazione è indiretta perché si prova che supporre il numero dei numeri primi finito porta ad una contraddizione. La dimostrazione consiste nel seguente procedimento:

- sia P il prodotto di ***tutti*** i numeri primi, che si ritengono di numero finito;
- si consideri il numero $N = P + 1$;
- N non può essere un numero primo, infatti, ciò sarebbe contrario all'ipotesi per cui già P doveva essere il prodotto di ***tutti*** i numeri primi, quindi N deve essere un numero composto.
- Se N è un numero composto vi deve essere un qualche numero primo p che "lo misura", ossia che lo divide;
- ma p non può essere nessuno dei fattori primi che compongono P, perché, altrimenti, dovrebbe anche essere un fattore del secondo addendo 1 che compare in N
- p, allora, deve essere un fattore primo diverso da tutti quelli che costituiscono il prodotto P.
- Quindi: l'ipotesi che P fosse il prodotto di ***tutti*** i numeri primi deve essere falsa.

Libro X

Il libro X comprende una classificazione sistematica dei segmenti incommensurabili della forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$; oggi si potrebbe considerare questo libro come un trattato sui numeri irrazionali.

Libro XI

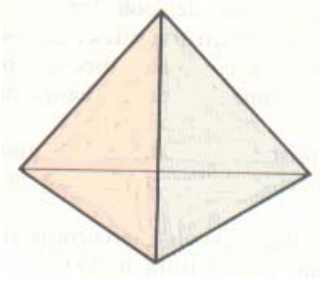
Gran parte del contenuto di questo libro comprende proposizioni concernenti la geometria tridimensionale, ossia la geometria solida.

Libro XII

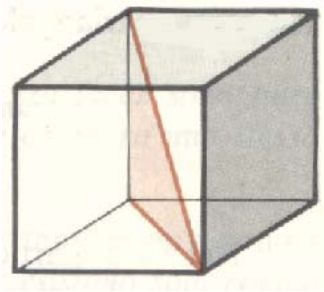
Tutte le proposizioni di questo libro si riferiscono alla misurazione di figure effettuate con il metodo di esaustione applicate a figure piane e solide. Sembra possibile che in questo libro Euclide abbia attinto da Eudosso gran parte del materiale.

Libro XIII

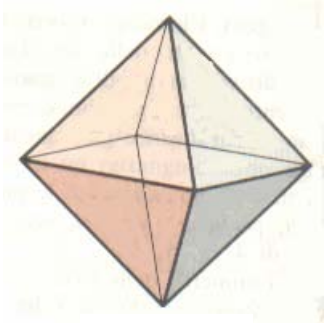
L'ultimo libro è dedicato interamente alle proprietà dei cinque solidi regolari. Questo fatto ha indotto alcuni storici a pensare che l'intera opera fosse stata scritta per celebrare le figure cosmiche o platoniche.



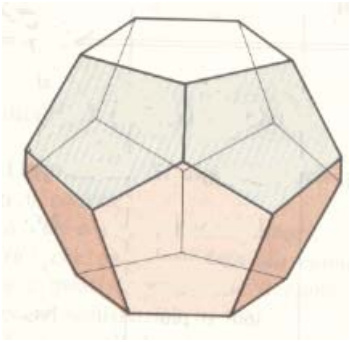
Tetraedro



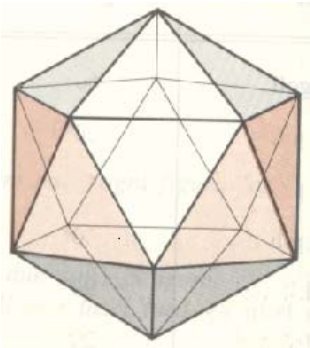
Cubo



Ottaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Una tale ipotesi appare, però, piuttosto gratuita, dal momento che gran parte del materiale contenuto nei libri precedenti non ha niente a che fare con i poliedri regolari.
L'obiettivo dei teoremi trattati è quello di "comprendere" o includere ciascuno dei solidi regolari in una sfera, ossia di trovare il rapporto tra il lato del solido inscritto e il raggio della sfera ad esso circoscritta. Tali calcoli, però, vengono attribuiti da alcuni commentatori greci a Teeteto, al quale sembra sia dovuta gran parte del XIII libro.

L'ultima proposizione degli *Elementi* dimostra che non vi possono essere altri poliedri regolari oltre i cinque già citati.
I poliedri regolari trattati sono detti figure cosmiche o platoniche perché Platone aveva associato a ciascuno di essi i quattro elementi base di Empedocle (483-423 a.C.) e in quest'interpretazione cosmologica, egli fece corrispondere alla sfera l'universo nella sua interezza.

Tetraedro	Fuoco
Cubo	Terra
Ottaedro	Aria
Dodecaedro	"Universo" o "Quintessenza"
Icosaedro	Acqua

Quasi 1900 anni più tardi, anche l'astronomo Keplero s'interessò dei solidi regolari, cercando di costruire una cosmologia basata su queste figure. Egli pensò di collegarli alle orbite dei pianeti attorno al sole, ritenendo che questi dovessero aver fornito al Creatore la chiave per la struttura dell'universo.

Nei tempi antichi, spesso poteva accadere che ad un celebre autore venissero attribuite opere non sue. Per questo motivo alcune edizioni degli *Elementi* comprendono due altri libri che, però, studiosi più recenti hanno dimostrato essere opere apocrife.

Il cosiddetto Libro XIV riprende il tema dei solidi regolari inscritti in una sfera: si ritiene che questo libro possa essere stato scritto da Ipsicle sulla base di un trattato, oggi perduto, di Apollonio. Ipscicle, vissuto probabilmente nella seconda metà del II secolo a.C., è considerato l'autore di un'opera astronomica dal titolo *De ascensionibus*, da quest'opera sembra probabile sia derivata la divisione del cerchio in 360 parti, poi universalmente accettata.

Il Libro XV, infine, che è di livello inferiore e che tratta sempre dei solidi regolari, si ritiene opera, almeno in parte, di Isidoro di Mileto, architetto della cattedrale della Santa Sapienza a Costantinopoli, attivo verso il 532 d.C..

Il successo degli *Elementi* nei secoli

Gli *Elementi* di Euclide non sono solo la maggiore e più antica opera matematica greca che ci sia pervenuta, ma costituiscono anche il più autorevole manuale di matematica di tutti i tempi. Raramente, nella storia, un testo ha avuto tanta fortuna e altrettanto raramente è sempre servito, nel corso dei secoli, per lo scopo originario con il quale era stato concepito: servire come introduzione al pensiero matematico perché gli allievi potessero affrontare gli studi superiori. Ovviamente l'opera ha subito vari rimaneggiamenti, ma sostanzialmente tutti con l'obiettivo di rendere il testo più chiaro per i diversi tipi di studenti ai quali è stato proposto.

La Formazione degli *Elementi*

Il costituirsi della matematica, così come è stata presentata negli *Elementi,* ha le sue origini in una fase pre-euclidea della storia di questa disciplina. É possibile far risalire tale momento al cosiddetto *Elenco dei geometri,* che, composto da Eudemo da Rodi, discepolo di Aristotele del IV sec. a.C., ci è giunto attraverso una lunga serie di intermediari, fino a costituire parte integrante di un'importante opera del filosofo e matematico Proclo. Questa sintesi aveva lo scopo di dare una giustificazione autorevole al modo in cui i greci concepivano la matematica: cioè come quel sistema ipotetico deduttivo che negli *Elementi*, *Stoichèia* in greco, trovò la sua massima espressione.
Quando s'impose il gusto del commento alle opere classiche, sia per salvare il patrimonio conoscitivo, sia per rendere più facile la lettura delle opere di maggior impegno, il capolavoro euclideo si collocò al centro anche di tali interessi.
Fu in questo contesto che, nel IV sec. d.C., il matematico **Teone di Alessandria** mise a punto un'edizione riveduta e corretta degli *Elementi* a scopi didattici. Tale rielaborazione costituì il testo base d'ogni edizione degli *Elementi* fino al 1800; basti pensare che sino al Medioevo e oltre si credevano di Teone tutte le dimostrazioni, mentre erano attribuiti ad Euclide solo gli enunciati dei teoremi.

La tradizione bizantina, araba e latina

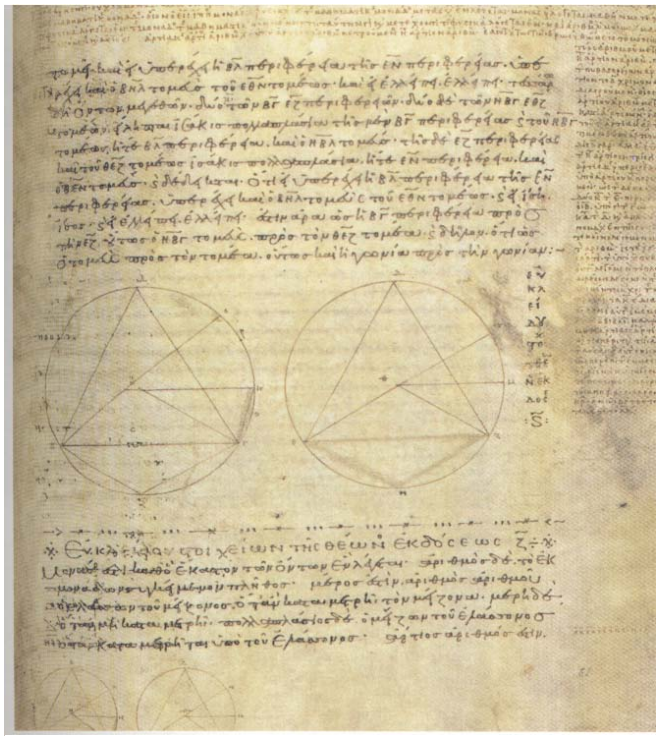


Figura 5 Manoscritto bizantino del X sec. contenente gli Elementi di Euclide

Nell'ambito scientifico, l'importanza storica di Bisanzio è determinata, più che da contributi innovativi, dal merito di aver custodito le grandi opere classiche. I testi originali della gloriosa tradizione matematica greco-ellenistica vennero ritrovati, dall'Umanesimo e dal Rinascimento, proprio nelle aree dell'Impero Romano d'Oriente e nei paesi asiatici del Medio Oriente.
I Bizantini fornirono la documentazione relativa alle opere classiche anche per la loro traduzione nelle lingue medio ed estremo orientali; lingue dalle quali si ebbe, poi, la traduzione in arabo.

Gli Arabi dedicarono agli *Elementi* un'attenzione sicuramente superiore a quella dei Latini. Già nel X sec., infatti, gli Arabi avevano due traduzioni integrali del testo euclideo: una poco attenta e una più curata. Accanto alle traduzioni integrali e a quelle parziali, inoltre, si moltiplicarono scritti introduttivi, commentari, sommari e revisioni.

Il mondo Occidentale venne a conoscenza degli *Elementi* attraverso due principali direttive: con traduzioni dirette, spesso parziali, dal greco in latino e con testi tradotti dall'arabo.
La più rinomata traduzione diretta sarebbe stata fatta da Severino Boezio (sec. V–VI), ma sono giunti sino a noi solo tardivi frammenti.
In relazione alle traduzioni dall'arabo, si ebbero tre importanti opere.

I) La traduzione del canonico **Gerardo da Cremona** (1114-1187), basata sulla traduzione araba attenta, che rappresentava con una notevole fedeltà il testo greco di Teone.

II) La traduzione prodotta dal monaco inglese **Adelardo di Bath** (1075 circa -1160); basata sulla traduzione araba meno curata ma abbondantemente manipolata dall'autore nella duplice funzione di chiarificazione didattica e di commento filosofico. Per questo motivo tale opera ebbe maggior successo nell'ambito della Scolastica medioevale.

III) La traduzione del canonico **Giovanni Campano** (sec. XIII) di Novara, il quale, per la sua traduzione dall'arabo, si rifece alla versione di Adelardo.
Questa versione, corredata da ampi commenti esplicativi, costituì il testo di riferimento per tutto il Medioevo e parte del Rinascimento

Il testo euclideo, diffusamente rivisto e commentato, che le traduzioni medioevali misero in circolazione, aveva ormai assunto la quasi completa fisionomia di manuale scolastico. Esso fu ampiamente apprezzato sia nella Facoltà di Arti, nella quale la matematica era vista soprattutto in funzione del suo aspetto pratico, sia nella Facoltà di Filosofia: le discussioni relative alla natura e al fondamento dei vari assiomi, come pure quelle sull'infinitesimo "angolo di contingenza o di contatto", ossia quello tra la circonferenza e la sua tangente, o sulla divisibilità o continuità delle grandezze, lo resero un testo molto utilizzato.

Il Rinascimento e il Cinquecento

Figura 6 Pagina degli Elementi in una versione latina del XV sec. - Firenze, Biblioteca Nazionale

In questo periodo si ebbe una fiorente produzione di materiale intorno al capolavoro euclideo.

I) L'invenzione della tipografia diede subito spazio a diverse edizioni integrali o parziali degli *Elementi*, che videro la luce già all'epoca degli Incunaboli. La prima e più importante fu quella che comparve a Venezia nel 1482: questa riproduceva la versione medioevale latina realizzata dal Campano.

II) Dopo le edizioni dell'epoca degli Incunaboli, l'umanista **Bartolomeo Zamberti** (sec. XV-XVI) pubblicò nel 1505, sempre a Venezia, una sua traduzione, condotta direttamente su codici greci della versione teonina; egli, inoltre, volle espressamente denunciare la versione del Campano come piena d'incredibili sciocchezze.

III) Nel 1509 a Venezia, il francescano **Luca Pacioli**, come risposta allo Zamberti, pubblicò una riedizione corretta degli *Elementi* nella versione

del Campano, da lui ritenuto "interpres fidissimus".

IV) Nel 1533, si ebbe l'*editio princeps* del testo greco, nella versione teonina, curata dal teologo riformato **Simon Grynaeus** il vecchio (1493-1541), professore di greco all'Università di Basilea. Tale versione, non particolarmente affidabile e autorevole, fu espressione dell'interesse che Umanesimo e Rinascimento ebbero per gli *Elementi*.

V) Nel 1543 il matematico bresciano **Niccolò Tartaglia** (1499-1557) pubblicò a Venezia una versione italiana degli *Elementi*, la prima data alle stampe in lingua europea. Questa si basava sia sulla traduzione latina dall'arabo del Campano, sia sulla traduzione latina dal greco dello Zamberti.

VI) Degna di menzione risulta la presa di posizione del filosofo e matematico francese **Petrus Ramus** (Pierre de la Ramée: 1515-1572) che criticò l'opera euclidea. Egli propose un nuovo ordinamento didattico, con l'anticipazione dell'aritmetica rispetto alla geometria e con la riduzione al minimo dei principi o postulati posti all'inizio di ogni argomento: questi ultimi, inoltre, dovevano essere illustrati con il ricorso ad esempi intuitivi o constatazioni empiriche.

VII) Nel 1572 si ebbe la pubblicazione, a Pesaro, della traduzione dal greco in latino di **Federico Commandino** (1509-1575). L'opera, prodotta dal più competente matematico del Rinascimento, che era in possesso anche di un'ottima preparazione linguistica e letteraria, ebbe risonanza e rilevanza di vasta portata.

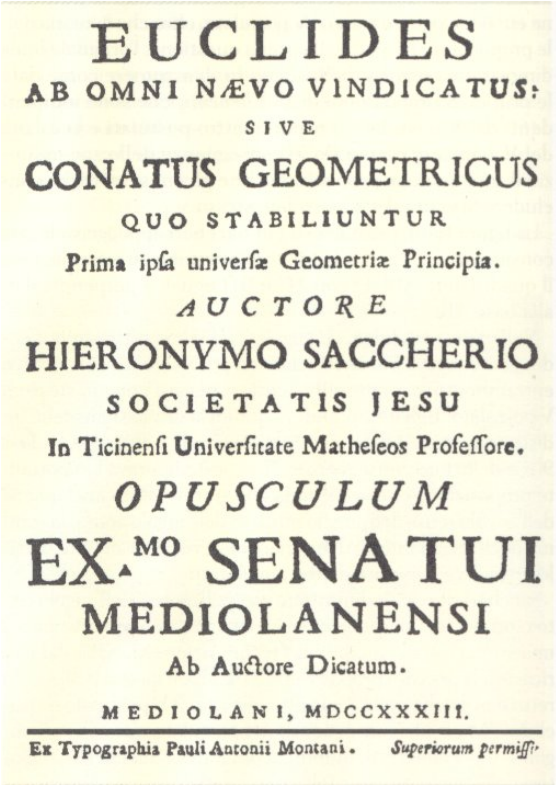
VIII) Nel 1547, il gesuita austriaco **Christopher Clavius** (1537-1612) pubblicò una sua traduzione del testo euclideo, apportandovi però cospicui adattamenti. Ad una nuova edizione della sua opera, del 1603, invece, è legata una prima certa traduzione in cinese dei primi sei Libri degli *Elementi*: compiuta dal gesuita italiano Matteo Ricci e dai suoi collaboratori cinesi, fu pubblicata a Pechino nel 1607.

Il Seicento e il Settecento

L'opera di Euclide godette di grande considerazione anche nel 600.
Degna di particolare nota è la difficoltà segnalata da **Galileo Galilei** in merito al Libro V e alla teoria delle proporzioni. Galileo, considerata oscura la trattazione, presentò l'argomento in modo più intuitivo ma meno rigoroso. La sua teorizzazione, già edita a Firenze nel 1674, fu riproposta in una traduzione del manuale euclideo preparata dallo stesso segretario e ultimo discepolo di Galileo. Nei due tomi apparsi a Firenze nel 1690, la sequenza di pubblicazione comprendeva i Libri degli *Elementi* dal I al V, il "Quinto libro" galileiano e i Libri VI, XI e XII di Euclide. Quest'opera, che ebbe altre cinque edizioni nell'arco di novant'anni, fece la sua ricomparsa, con solo lievi ritocchi, nelle scuole del Regno d'Italia.

Il Settecento fu caratterizzato, oltre che da nuove edizioni del testo euclideo, da un notevole interesse di carattere critico: interesse rivolto sia all'aspetto puramente matematico e tecnico, sia al metodo pedagogico utilizzato nella trattazione della materia.

I) Nel 1703 si ebbe la pubblicazione dell'*Opera omnia* di Euclide nel testo originale greco, a cura di **David Gregory** (1659-1708), professore di astronomia e membro della Royal Society di Londra. Essa si basava, sostanzialmente, sull'*editio princeps* cinquecentesca del Grynaeus, con traduzione latina del Commandino a fronte.
Da allora questa divenne la versione standard, relativamente al testo greco, fino all'Ottocento.


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permiſſ.

II) Nel 1733 apparve l'importante scritto del gesuita **Girolamo Saccheri** (1667-1733) dal titolo: "Euclide emendato da ogni neo, ovvero tentativo geometrico con cui vengono stabiliti i primi principi della geometria universale". Quest'opera riveste una notevole importanza per ciò che riguarda gli studi critici sull'opera di Euclide, per il tentativo in essa perseguito di dimostrare la dipendenza del V Postulato, o Postulato delle rette parallele, da quelli precedenti. In questo modo Saccheri si proponeva di eliminare ogni possibile difetto che si potesse trovare nella struttura logica del capolavoro euclideo. Con il tentativo di difendere gli *Elementi* da tutte le obiezioni che erano state sollevate, Saccheri, in effetti, diede involontaria origine alla nascita delle geometrie non euclidee.

III) Un netto ed esplicito allontanamento dal metodo pedagogico euclideo si ebbe con i manuali pubblicati da **Alexis-Claude Clairaut** (1713-1765) e **Adrien-Marie Legendre** (1752-1833).
Clairaut, nella sua opera, dava ampio spazio all'intuizione e individuava nella maniera con cui la geometria era insegnata, più che nell'astrattezza propria della materia, la causa delle difficoltà incontrate dagli studenti.
Egli criticò sia l'aspetto noioso con cui gli *Elementi* proponevano lo studio della geometria, sia l'inserimento, in successivi manuali, di esempi pratici esplicativi delle varie proposizioni posti dopo le proposizioni stesse: questo, infatti, non invogliava gli studenti all'apprendimento e non facilitava in alcun modo la comprensione dei concetti che, in ogni caso, dovevano essere capiti prima e in astratto. Egli propose un metodo "più naturale" basato su diverse considerazioni:
- la scienza si è formata per gradi;
- i primi passi sono stati compiuti a seguito di qualche necessità pratica;
- tali primi passi possono facilmente essere compresi dai principianti perché, nelle stesse condizioni in cui questi ultimi si trovano, erano anche coloro che li avevano compiuti per primi.

Nel 1794, anche Legendre pubblicò un'opera in cui cercò di rinnovare i metodi espositivi degli elementi di geometria rispetto al modello euclideo. Il manuale ebbe maggior fortuna editoriale del precedente perché era assai chiaro e preciso, superiore addirittura a quello euclideo per ricchezza di materia trattata. In quest'opera, però, la geometria risultò, di fatto, subalterna all'aritmetica.

L'Ottocento

L'edizione degli *Elementi* rivista da Teone di Alessandria costituì, come già visto, il testo base per ogni edizione dell'opera dagli inizi sino all'Ottocento.
A guidare gli studiosi ottocenteschi nell'individuazione delle versioni pre-teonine del testo euclideo fu un'annotazione che lo stesso Teone lasciò scritto in un'altra sua opera. In quest'opera Teone

affermava che, nella sua edizione degli *Elementi,* egli aveva fatto un'aggiunta all'ultima proposizione del Libro VI: i codici che non contenevano quell'aggiunta costituirono da allora la prima indicazione del fatto che, probabilmente, ci si trovava di fronte ad un testo euclideo pre-teonino.

I) Nel 1808 **François Peyrard** (1760-1822), bibliotecario all'Ecole Polytechnique di Parigi e poi professore di matematica e astronomia al Liceo, editore infaticabile di testi classici, notò che in un manoscritto Vaticano era assente la famosa aggiunta teonina. Questa e altre circostanze condussero lo studioso a convincersi di essere di fronte ad un testo pre-teonino dell'opera euclidea, di cui realizzò un'edizione trilingue: greco, latino e francese.

II) Si deve, però, a **Johan Ludwig Heiberg** (1854-1928), professore di filologia classica dell'Università di Copenaghen, la pubblicazione a Lipsia, tra il 1883 e il 1888, di cinque tomi della sua edizione critica del testo originale greco, con versione latina a fronte, dei tredici libri degli *Elementi* di Euclide e dei due aggiuntivi. Egli basò le sue ricerche sul precedente codice vaticano, su altri cinque antichi codici nel frattempo rinvenuti e sulla raccolta sistematica d'osservazioni e citazioni in materia, presenti nelle più diverse fonti antiche. Il lavoro filologico e storiografico, occorso per giungere all'edizione critica del testo originale euclideo, fu di mole imponente.

Nel corso dell'Ottocento, intanto, in Europa, negli Stati Uniti d'America e in Canada gli ordinamenti scolastici erano diventati di competenza dei Governi. Per quanto riguardava lo Stato Italiano, costituitosi nel 1861, l'allora Ministro dell'Istruzione pubblica M. Coppino, con un Regio Decreto, definì la questione dei Programmi d'insegnamento delle scuole secondarie per l'indirizzo classico. Nelle istruzioni del decreto riguardanti in modo specifico la matematica, si evidenziava, più che la maturazione di competenze "applicative", legate all'effettiva "utilità" della materia, il valore "formativo" che sarebbe proprio della disciplina.
Coerentemente con queste considerazioni generali venne proposto un qualificato progetto di insegnamento anche della Geometria: " Nella geometria, per dare all'insegnamento la massima efficacia educativa e per ridurre ad un tempo la materia entro modesti confini, basta applicare alle norme l'esempio delle scuole inglesi, facendo ritorno agli *Elementi* di Euclide, che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore matematico". Un'ulteriore raccomandazione della normativa consistette nel mettere al bando tutti quei manuali in cui, esagerando inopportunamente l'impostazione aritmetica legendriana, si dava indebito risalto a meccanismi calcolatori.
È in questo contesto che si ebbero due nuove edizioni di base degli *Elementi*.

I) In evidente coordinamento con l'intervento legislativo, nel 1867 comparve a Firenze l'edizione degli *Elementi* di Euclide curata da **Betti e Brioschi**. In realtà, salvo poche modifiche di forma e di sostanza, si trattava di una ripresentazione del volume curato dal discepolo di Galileo, edito per la prima volta alla fine del Seicento.

II) Con la proclamazione governativa dell'ortodossia geometrica di tipo euclideo, voci autorevoli videro l'Italia isolata in settori in cui, proprio allora, la ricerca matematica europea avanzava a grandi passi. Per questo motivo, già nel 1869 a Napoli, si ebbe la prima edizione dei pregevoli *Elementi* di geometria, preparata da **Sannia e D'Ovidio**. Gli Autori, nella prefazione scrissero: "quindi apparisce evidente la utilità di un libro come il nostro; il quale, serbando la forma antica senza voler troppo parere, ed evitando l'uso dell'Aritmetica e dell'Algebra ove non è indispensabile, contenga quanto basti ad affinare con l'esercizio l'intelligenza del giovinetto, e a porlo in grado di proseguire gli studi matematici senza salti dannosi".
Con questo testo aveva inizio la moderna manualistica matematica e il manuale euclideo in sé scompariva dalla scuola italiana.

Il Novecento

Superato l'uso dell'opera di Euclide come manuale scolastico, questa divenne oggetto d'interessanti studi storiografici. Si arrivò alla redazione di moderne traduzioni nelle varie lingue, filologicamente assai ben condotte e dotate di commenti storici e critici di notevole valore.

I) La prima e più importante di tutte fu, e rimane certamente, la traduzione realizzata dall'inglese Thomas Little Heart (1861-1940). Matematico e storico della matematica e astronomia dell'antica Grecia, produsse un'opera intitolata *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* basata sulla ricostruzione critica del testo euclideo condotta da Heiberg.

II) Anche in Italia comparve un'edizione pregevole dal titolo *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna,* a cura di F. Enriquez.

III) Più di recente, una nuova traduzione e edizione commentata ha reso accessibile anche a livello didattico il capolavoro euclideo: *Gli Elementi di Euclide*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni.

Oggi, le nuove edizioni del manuale euclideo sono quelle che si trovano in diversi siti Internet, quali, ad esempio, quello curato dall'Università di Huston negli Stati Uniti.

Osservazioni e critiche agli *Elementi*

L'opera di Euclide fu, nel corso dei secoli, oggetto d'esame e di critica da parte di molti studiosi. Occorre, però, premettere e sottolineare che è facile criticare un'opera alla luce delle conquiste ottenute successivamente: i criteri di rigore, infatti, mutano con i tempi, ed è necessario evidenziare come, all'epoca di Euclide, gli *Elementi* costituirono la più rigorosa e razionale sistemazione della matematica elementare che fosse mai stata scritta. Non solo, ma tale impostazione sarebbe stata rivista e ristrutturata solo 2000 anni dopo.
Nell'epoca moderna l'opera di Euclide è stata criticata per due motivi di base: le definizioni e il sistema di assiomi.

I) Le definizioni

In quest'ambito, è stata osservata la mancanza d'un elenco preliminare di termini indefiniti, assunti esplicitamente come noti, in base ai quali definire poi gli elementi della teoria considerata.
Le definizioni introdotte da Euclide nel Libro I, quali, ad esempio, punto, retta e angolo piano, vengono fornite usando termini e concetti non meglio noti di quelli che si vogliono proporre.
In realtà, facendo riferimento ai differenti concetti che i Greci avevano di definizione, ci si può rendere conto di come Euclide, con il suo iniziale elenco, intendesse fornire effettivamente l'insieme dei termini del discorso: semplicemente, invece di esprimerli tramite una sequenza di vocaboli, ne diede una precisazione; quale chiarimento di ciò di cui intendeva parlare. Occorre, infatti, distinguere quella che, nella tradizione greca, era chiamata definizione "nominale" da quella che era detta definizione "reale". La prima è effettivamente quella definizione formale in cui il significato di un termine viene introdotto convenzionalmente, utilizzando una combinazione di termini già dati per noti: questo corrisponde anche all'attuale concetto di definizione, ed è quella che lo stesso Euclide ha usato in altre parti del suo trattato. La definizione reale, invece, mira piuttosto a descrivere ciò che s'intende con un termine, non usando altri termini ma ricorrendo ad enti esistenti ai quali questo si riferisce.
Si può osservare, quindi, che alcuni dei termini euclidei sono introdotti mediante definizioni di tipo "reale", altri, invece, mediante vere e proprie definizioni "nominali". Ciò può apparire, agli occhi degli studiosi moderni, come una trattazione alquanto confusa, ma non bisogna dimenticare che, dal punto di vista classico, la mescolanza dei due tipi di definizioni era cosa del tutto naturale.

II) Gli assiomi

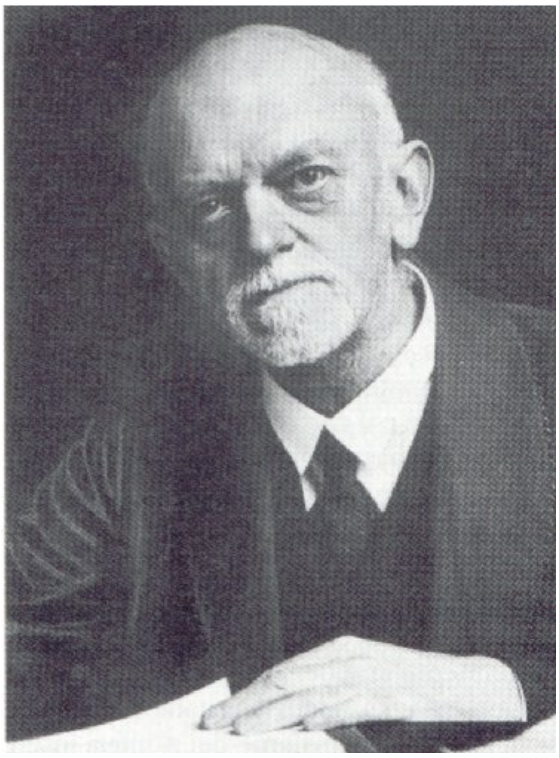
Dal punto di vista dei moderni criteri, il sistema d'assiomi enunciato da Euclide risulta incompleto e spesso egli fa uso di postulati inespressi.
Con l'esame dei postulati e degli assiomi, si possono proporre diverse osservazioni.

- I postulati hanno un fondamentale carattere costruttivo; ossia asseriscono la possibilità di descrivere rette, cerchi e, tramite il V postulato, il punto d'intersezione tra due rette. Solo il quarto non pare abbia tale esplicito carattere di "costruibilità", infatti, al contrario dei primi tre che iniziano con l'espressione "Si possa tracciare.." oppure "Si possa descrivere…" esso consiste nell'affermazione: *Tutti gli angoli retti siano uguali*. Tale postulato è però premessa indispensabile del V, consentendo di parlare dell'angolo retto come di una grandezza determinata.
  Questo carattere di "costruibilità" è particolarmente importante perché, secondo la mentalità classica, esso era garanzia della "esistenza" degli enti matematici. Per questo motivo può essere considerato una sostituzione della "dimostrazione di esistenza" che accanto a quella di "unicità" è invece abituale nella matematica moderna.
  I primi due postulati, però, non garantiscono, ossia non comportano necessariamente, né l'unicità della retta che passa per due punti non coincidenti, né la sua infinitezza: essi affermano che ne esiste almeno una e che non ha termini.

Per ciò che riguarda gli assiomi si possono effettuare altre considerazioni.

- Il settimo assioma afferma, sostanzialmente, che "cose che vengono portate a coincidere con uno spostamento che non modifica la loro forma sono uguali". L'identificazione del concetto d'uguaglianza con quello di sovrapposizione, come è stato chiarito in epoca moderna, comporta delle difficoltà: in tal modo, infatti, utilizzando il concetto di movimento che non altera la forma, si coinvolge il concetto di movimento rigido, il quale, per essere definito, richiede a sua volta il concetto di uguaglianza.

In sostanza, l'assiomatica euclidea appare, agli studiosi moderni, troppo compatta: i singoli assiomi o postulati contengono spesso più di una proprietà o relazione sussistente tra i concetti primitivi impiegati. Ai fini di un'attenta analisi formale, invece, è opportuno elencare dettagliatamente tutte le fondamentali proprietà, distinguendole e analizzandole separatamente.



Per questo motivo la formulazione euclidea è stata oggi abbandonata e sostituita con quella di ***David Hilbert*** (1862 – 1943).
Il grande matematico tedesco diede contributi di enorme valore nella sistemazione moderna dei fondamenti della matematica.
Al Congresso di Parigi del 1900, Hilbert, rivolto ai colleghi, affermava: "dobbiamo passare in rassegna davanti alla nostra mente le questioni irrisolte e guardare ai problemi che la scienza moderna ha di fronte e la cui soluzione ci aspettiamo dal futuro". In questo contesto egli propose 23 questioni note nel mondo matematico come ***problemi di Hilbert,*** dei quali circa la metà è tuttora irrisolta o, in alcuni casi, ha perso l'interesse della ricerca attuale.
Hilbert, nei suoi *Fondamenti di geometria,* che costituiscono il momento finale di tutto il lavoro critico riguardante gli *Elementi* di Euclide, fornisce un'esposizione dei contenuti che, pur equivalente dal punto di vista contenutistico, soddisfa i requisiti di una completa esplicitazione formale.

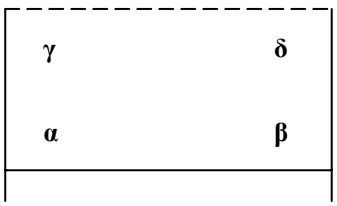
LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

La teoria delle rette parallele ha sostanzialmente come premessa il V postulato di Euclide e la storia di questa proposizione costituisce uno degli argomenti più interessanti dell'intera storia del pensiero scientifico. Essa, inoltre, fornisce la premessa indispensabile per comprendere il senso di quella rivoluzione dei fondamenti della matematica, avvenuta nell'ottocento, che ha dato origine ai sistemi di geometria non euclidea.
Sull'evidenza dei primi quattro postulati sembra di non poter avanzare alcun ragionevole dubbio, ma altrettanto non può dirsi del V. Il punto delicato della dimostrazione relativa alle rette parallele tagliate da una trasversale, infatti, consiste nell'affermare che, nel momento in cui le due rette, con la trasversale, formano angoli coniugati interni uguali a due retti, esse non hanno più alcun punto in comune. Il momento del "distacco" delle due rette, cessando d'essere osservabile nella realtà, perché la costruzione risulta impossibile da realizzare, rende problematica l'evidenza dell'affermazione.
Euclide stesso evitò di usare il V postulato nelle dimostrazioni ove fosse possibile usare solo i primi quattro. Questo modo di procedere sta ad indicare che, molto probabilmente e con grande accortezza, egli vide in quell'affermazione dei punti deboli e cercò a lungo di dimostrarla sulla base dei quattro postulati precedenti. Non essendoci riuscito, risolse la situazione inserendo tale asserzione tra gli altri.
Dal V postulato Euclide ricavò un teorema, equivalente al postulato stesso, che è stato utilizzato storicamente per i tentativi di dimostrazione:

Per un punto esterno ad una retta passa una ed una sola parallela alla retta data

I critici di Euclide, dagli inizi e sino all'Ottocento, cercarono di dimostrare il V postulato in base ai primi quattro, ritenendo che fosse da questi logicamente dipendente. In tal modo, ad esempio, Proclo giunse soltanto a sostituirlo con vari postulati equivalenti, mentre Wallis (1616-1703), nel Rinascimento, lo dedusse dall'esistenza di figure simili. Questo, comunque, fu un risultato di grande importanza perché nelle geometrie non euclidee non esistono figure simili, infatti la variazione delle lunghezze comporta necessariamente la variazione degli angoli: tale variazione prende il nome di *eccesso angolare.*
Questi infruttuosi tentativi furono anche determinati dalla ferma convinzione dei matematici che, nonostante le difficoltà insite nella formulazione degli assiomi, la geometria di Euclide fosse l'unica vera descrizione del mondo fisico. Per tutti, dunque, l'obiettivo rimaneva quello di riorganizzare gli assiomi e i teoremi euclidei, con la certezza di dover ritrovare, infine, tutte le proprietà enunciate dall'antico geometra e, in particolare, quella dell'unicità della parallela, sulla cui verità nessuno dubitava.
Un grande passo avanti, nella critica al V postulato fu fatta dal gesuita Girolamo Saccheri (Sanremo 1667 – Milano 1733); egli cercò di utilizzare una dimostrazione *a contrariis:* partendo dalla negazione del postulato, si aspettava di trovare qualche contraddizione e, quindi, la negazione dell'ipotesi.

Egli individuò due ipotesi alternative al V postulato:



1. due perpendicolari ad una retta formano due angoli ottusi (**γ e δ**) con una parallela alla retta data;

2. due perpendicolari ad una retta formino angoli acuti.

Egli intese dimostrare che ciascuna delle due proposizioni precedenti, se assunta in luogo del V postulato, avrebbe necessariamente condotto, nel confronto con gli altri quattro, a delle contraddizioni.
Saccheri, partendo dall'ipotesi degli angoli ottusi, corrispondente al teorema per il quale "per un punto P esterno ad una retta non passa alcuna parallela alla retta data", dedusse diverse contraddizioni; questo la rese incompatibile con gli altri assiomi e quindi da escludere.
Il religioso, invece, non riuscì ad arrivare ad alcuna contraddizione assumendo come ipotesi quella degli angoli acuti, ossia che per un punto P esterno ad una retta passa più di una parallela alla retta data. In quest'ultimo caso, infatti, egli dedusse dei teoremi che non erano in contrasto tra loro ma con quelli della geometria euclidea. Convinto dell'assurdità di simili conseguenze, concluse che anche quest'ipotesi fosse da scartare.
Risultava così confermato il V Postulato.
L'eliminazione dell'ipotesi dell'angolo ottuso gli riuscì correttamente perché equivale alla dimostrazione dell'"esistenza" della parallela.
I teoremi dedotti partendo dall'ipotesi dell'angolo acuto, invece, furono veri e propri teoremi di geometria non euclidea. Questi vennero ottenuti ammettendo esplicitamente l'unica negazione che, all'interno del sistema euclideo, si può fare del V postulato: quella relativa all'unicità della parallela. Per negare l'esistenza, infatti, è necessario modificare altri postulati oltre il V.
Saccheri non riuscì a raggiungere il suo scopo, ma ebbe il merito di essere stato il primo a dare il via, pur involontariamente, alle geometrie non euclidee. In questa sua fatica, infatti, egli giunse a scoprire un insieme di proposizioni, anche se per lungo tempo attribuito ad altri, di quella che sarebbe stata chiamata la geometria iperbolica.

Solo nel 1800, Gauss, Lobacevskij e Bolyai, indipendentemente l'uno dagli altri, dettero una sistemazione rigorosa dell'ipotesi dell'angolo acuto:

la geometria iperbolica

basata, appunto, sull'ipotesi per cui

per un punto del piano si può condurre più di una retta parallela ad una retta data
(postulato di Lobacevskij e Bolyai, 1830)

Figura 7 Nicolai Ivanovič Lobačevskij

Per comprendere le difficoltà legate ad un cambiamento di concezione della matematica è significativo osservare il comportamento di Gauss: il grande matematico, pur avendo ricavato autonomamente gran parte delle proprietà della geometria non euclidea, ottenute molto dopo da Lobacevskij e Bolyai, rinunciò a divulgarle perché ritenne che i tempi non fossero ancora maturi per accettare una simile novità. I risultati da lui ottenuti furono resi noti solo dopo la sua morte, e aiutarono i matematici del tempo a capire la rilevanza dell'argomento.
Nicolai Lobačevskij fu il primo matematico a pubblicare un testo sulle geometrie non euclidee. Docente presso l'Università di Kazan, perse il posto nel1846 per ragioni poco chiare; è possibile che qualche personaggio della corte di Nicola I si sia

accorto delle conseguenze destabilizzanti delle nuove scoperte matematiche.
Un modello classico che, utilizzando la stessa geometria euclidea, fornisce un'immagine efficace della geometria iperbolica è quella data da Christian Klein (1849 – 1925) nel 1889.
In questo modello, per ciascuno dei termini primitivi della geometria euclidea, si assume un nuovo significato.
Considerata nel piano una circonferenza Γ (Fig. a):

- Si chiama «punto» un punto interno a Γ, ossia un punto che appartiene al cerchio, esclusi i punti della circonferenza.
- Si chiama «retta» l'insieme dei punti di una corda PQ di Γ, esclusi gli estremi P, Q (corda aperta di Γ).
- Si chiama «semiretta» ciascuna delle due parti in cui la corda (aperta) PQ è divisa da un suo punto A.
- Si chiama «piano» l'insieme dei punti interni a Γ, cioè la regione di piano interna alla circonferenza.
- Si chiama «semipiano» ciascuna delle due parti in cui una corda PQ divide la regione interna di Γ, cioè divide il nostro «piano».

L'unico ente, dei tre fondamentali, che ha conservato la sua immagine antica è il punto; invece il piano e la retta hanno subito una modificazione, come una specie di «restringimento».

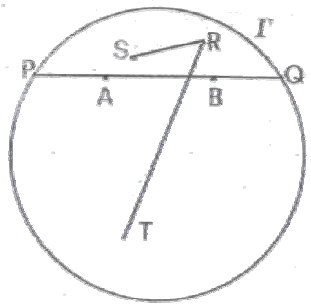


Fig a

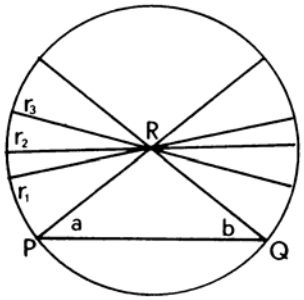


Fig.b

È possibile verificare immediatamente che i postulati d'appartenenza e d'ordine sono ancora soddisfatti quando per gli enti nominati si adottino i nuovi significati. Per esempio, il primo postulato d'appartenenza afferma che due punti A, B appartengono ad una retta e ad una sola. Questo avviene anche per due punti A, B del nuovo «piano». Essi appartengono ad una corda e ad una soltanto di Γ, cioè a quella che è stata chiamata retta.


Figura 8 Georg Friedrich Riemann

Con gradi diversi di complessità, si può provare che anche in questa nuova geometria sono verificati i postulati fondamentali, ma si può notare immediatamente che non è verificato il «postulato» delle parallele. Le rette r_1, r_2 e r_3, infatti, non incontrano la retta PQ (Fig. b) e sono perciò ad essa parallele.

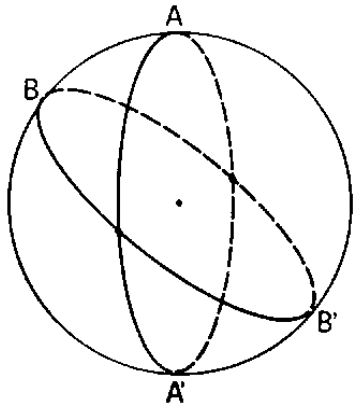
L'ipotesi dell'angolo ottuso ha permesso la costruzione di un'altra geometria non euclidea, dovuta al matematico **Bernhard Riemann** (1826 – 1866).
Questo accadde pochi anni dopo il lavoro di Lobacevskij e Bolyai e consenti di arrivare alla

geometria ellittica

basata, appunto, sull'ipotesi per cui:

per un punto del piano non si può condurre alcuna parallela ad una retta data
(postulato di Riemann, 1854).

Un modello espressivo molto efficace della geometria di Riemann è costituito dalla superficie di una sfera.



Considerata una sfera ordinaria della geometria euclidea, come già si è fatto nel caso della geometria iperbolica, anche in questo caso si attribuiscono nuovi significati a vocaboli noti.

- Si dice «piano» la superficie della sfera.
- Si dice «punto» una qualsiasi coppia di punti diametralmente opposti della sfera: (A, A'), (B, B').
- Si dice «retta» una qualsiasi circonferenza massima della sfera.

Anche in questo caso è possibile verificare che i postulati della geometria euclidea, assunti da quella riemaniana, sono soddisfatti. Per esempio, due «punti» del «piano» determinano una «retta», ossia per due coppie di punti diametralmente opposti passa una ed una sola circonferenza massima.
Non è valido, invece, il postulato di Euclide: sul piano, per un «punto *(A, A')»* non esiste «retta» (circolo massimo) che non incontri una «retta» data, perché due «rette» hanno sempre un «punto» (coppia di punti euclidei) in comune.
La geometria non euclidea di Riemann ha un evidente legame con la geometria della superficie terrestre. Le proprietà osservate sopra la sfera si verificano infatti nel caso di un triangolo formato da tre punti geografici distinti e devono essere tenute presenti, ad esempio, nella determinazione delle rotte aeree. Il percorso più breve tra due punti geografici, infatti, non è mai individuato da un segmento rettilineo, cioè un segmento nel senso della geometria euclidea, ma da un tratto di circonferenza massima, che viene detto geodetica.

Tutte e tre le geometrie considerate, nonostante le loro contrastanti affermazioni, sono tutte e tre «vere», ossia «corrette», «dedotte» in maniera riconosciuta legittima dai postulati.
Se, invece, con la parola «vero» si vuole intendere "conforme", "corrispondente alla realtà fisica in cui viviamo", allora si deve osservare, con Einstein (1916), che «la geometria non si occupa delle relazioni tra i concetti da essa presi in esame e gli oggetti dell'esperienza, ma soltanto della connessione logica di tali concetti l'uno con l'altro».
Il problema di sapere se la geometria dello spazio fisico sia una geometria euclidea oppure non euclidea è un problema che esula dalla matematica. Un'indagine di questo tipo spetta alla fisica e l'opinione di uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi, Einstein appunto, è che lo spazio fisico non sia, come per tanto tempo si è creduto "dopo Euclide", un mondo euclideo, ma sia un mondo non euclideo, nel quale è realizzata la geometria riemaniana.

Bibliografia

Compendio di storia del pensiero scientifico Federigo Eriquez – Giorgio de Santillana – Zanichelli

Storia della matematica C. B. Boyer – Oscar studio Mondatori

Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria; Agazzi – Palladino – Edizioni scientifiche e tecniche Mondatori

Mutamenti nel pensiero matematico H. Meschkowski – Serie scientifica Universale Bollati Boringheri

La Scienza
Numeri, figure, logica e intelligenza artificiale
La Biblioteca della Repubblica

Le Scienze
I grandi della scienza
Archimede: alle radici della scienza moderna – Pier Daniele Napoletani
Gauss: principe dei matematici e scienziato poliedrico – Rossana Tazzioli
Fermat: i sogni di un magistrato all'origine della matematica moderna – Giorello, Sinigalia

Cento Capolavori della scienza Pierluigi Pizzamiglio - Ed. La Scuola

L'affascinante numero π Jean-Paul Delahaye - Ghisetti e Corvi Editori

Il teorema del Pappagallo Denis Guedj - Longanesi & C.

I numeri celebri Luciano Cresci - Saggi Bollati Boringheri

Nuovo corso di geometria Palatini – Dodero - Ghisetti e Corvi Editore

Elementi di Geometria Vol.1 – Palatini – Faggioli – Ghisetti e Corvi.

Geometria Pompeo Nisini – Trevisini Editore, Milano